はじめよう経済学

第０講 経済数学入門

講師：加藤 真也

経済学に数学力は必要か？

経済学で必要な数学力

- 中学数学＋微分
- 大学受験の数学の問題より
ずっと簡単
- 経済学で使う数学の範囲は
かなり限られている

経済学で登場する数学

◎ 頻出

連立方程式・グラフ・**指数**

・関数・**微分**・偏微分

△ ほとんど出ない

積分・三角関数・複素数

今回(第０講)は…

1. 分数
2. 逆数
3. 両辺に〜
4. 変化率
5. 指数
6. 図形(易しい)
7. グラフ
8. 連立方程式
9. 微分
10. 偏微分
11. 関数(やや難)
12. 数列(やや難)

1. 分数

- $\dfrac{1}{2} = 1 \div 2$

- $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

2. 逆数

$\frac{3}{1}$

- 3の逆数は$\frac{1}{3}$

かける と1

- $\frac{2}{3}$の逆数は$\frac{3}{2}$

・ $A \overset{\text{大なり}}{>} \dfrac{C}{B}$ のとき

両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{A} < \frac{B}{C}$$

例 $2 > \dfrac{2}{3} \xrightarrow{\text{逆数}} \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2}$

約0.66⋯

3. 両辺に～

① 両辺を2乗する

例 2＝2

$$x = y$$

より、

4＝4

$$x^2 = y^2$$

② 移項(1)

$4=4$

$$x-2=4$$

$4+2=4+2$

両辺に2を足して、

$$x-2+2=4+2$$

$$x=4+2$$

$$x=6$$

③ 移項(2)

$$2x = 6$$

6＝6

6÷2＝6÷2

両辺を2で割って、

$$2x \div 2 = 6 \div 2$$

$$x = 6 \div 2$$

$$x = 3$$

例 $\frac{1}{3}x+2=6$ を解け

$$\frac{1}{3}x+2-2=6-2$$

$$\frac{1}{3}x=4$$

$$\frac{1}{3}x\times 3=4\times 3$$

$$x=\underline{\underline{12}}$$

4. 変化率

Price

価格をPとおく

P ：120円 → 150円

のとき、

デルタ

$\Delta P = 150 - 120 = 30$円

変化分

$$P：100円 \rightarrow 110円（10\%\uparrow）$$

$$P：110円 \rightarrow 121円$$

$$\frac{110-100}{100}=0.1$$

$$\frac{121-110}{110}$$

$\leftarrow \Delta P$

$\leftarrow$ 変化前のP

$$=\frac{11}{110}=0.1（10\%\uparrow）$$

$$\boxed{\text{価格の変化率} = \frac{\Delta P}{P}}$$

変化前

5. 指数　2^{5}

- $x^{0}=1$　例 $2^{0}=1$
- $x^{1}=x$　例 $2^{1}=2$
- $x^{-1}=\frac{1}{x}$　例 $2^{-1}=\frac{1}{2}$
- $x^{-a}=\frac{1}{x^{a}}$　例 $2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$

- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

  例　$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$

  例　$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$

- $$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

例1 $$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x \cdot x}}{\cancel{x \cdot x}} = x^3$$

例2 $$\frac{x^4}{x^4} = x^{4-4} = x^0 = 1$$

- $$(x^a)^b = x^{ab}$$

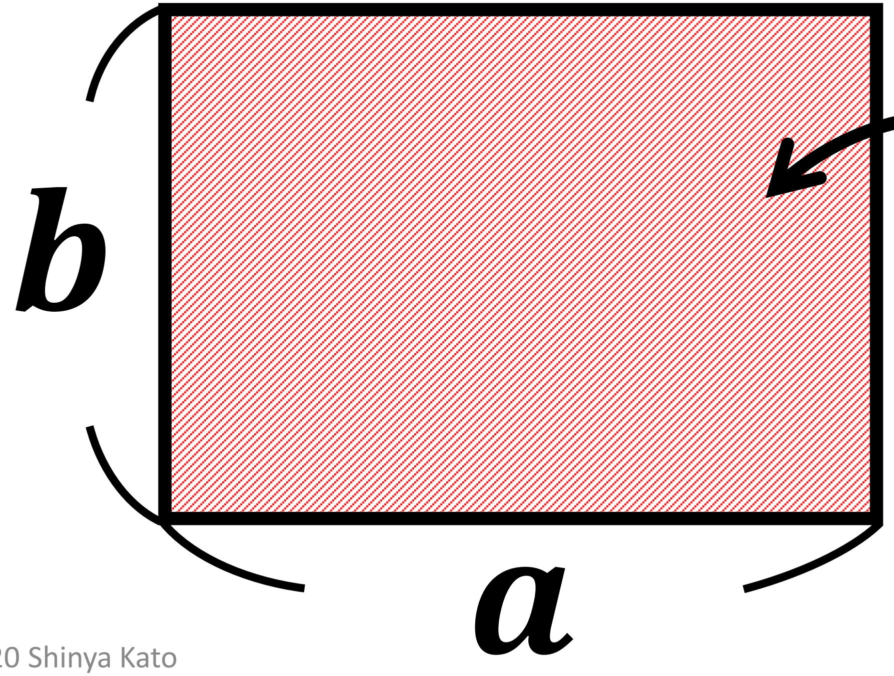
例 $$\left(x^2\right)^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^6$$

6. 図形

・三角形

（易しい）

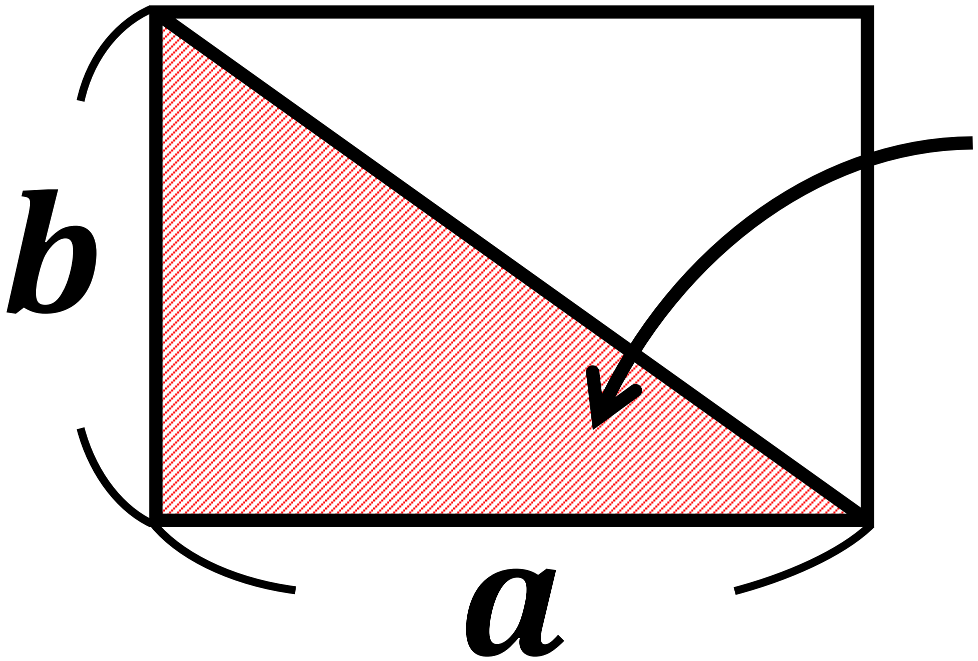
Step1



面積$S = a \times b$

（易しい）

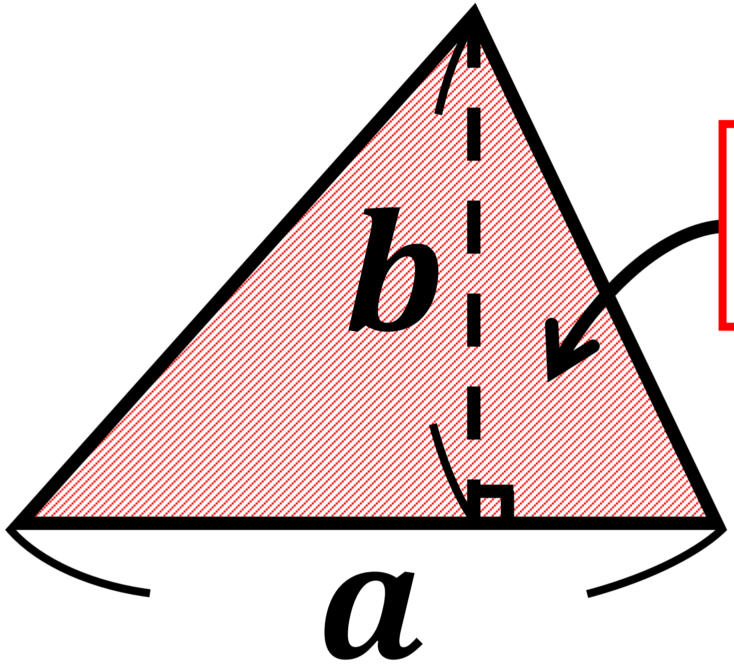
Step2



$$S = \underbrace{a \times b}_{\text{長方形の面積}} \div 2$$

（易しい）

Step3

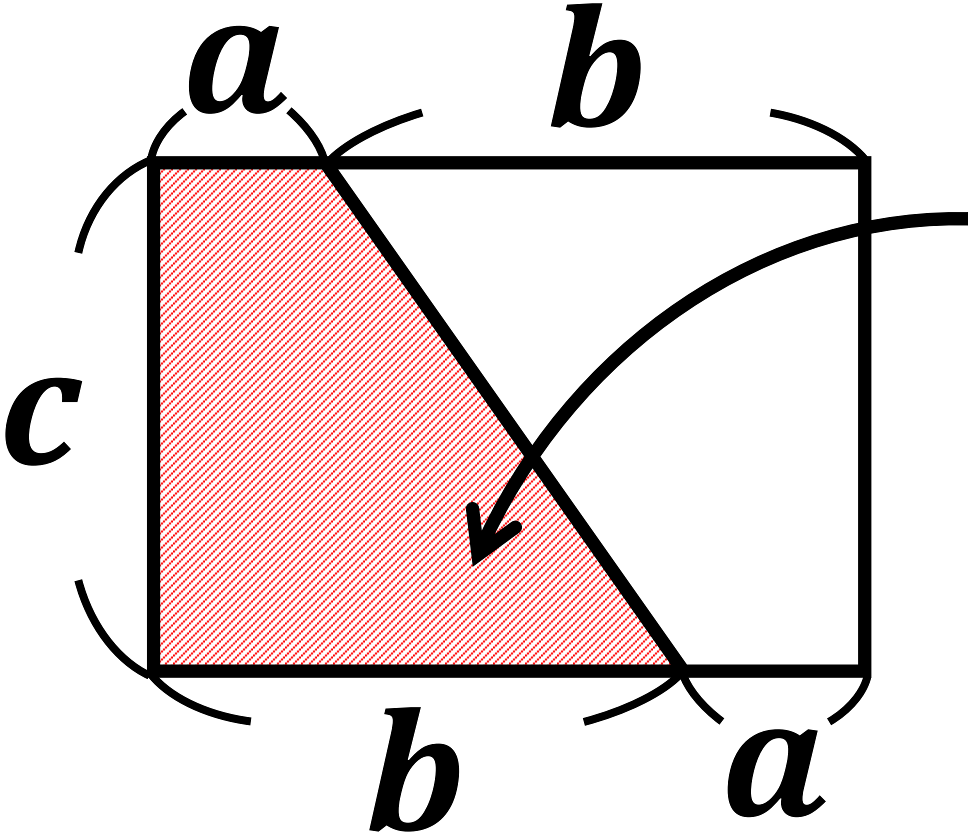


$$\boxed{S = a \times b \div 2}$$

・台形

（易しい）

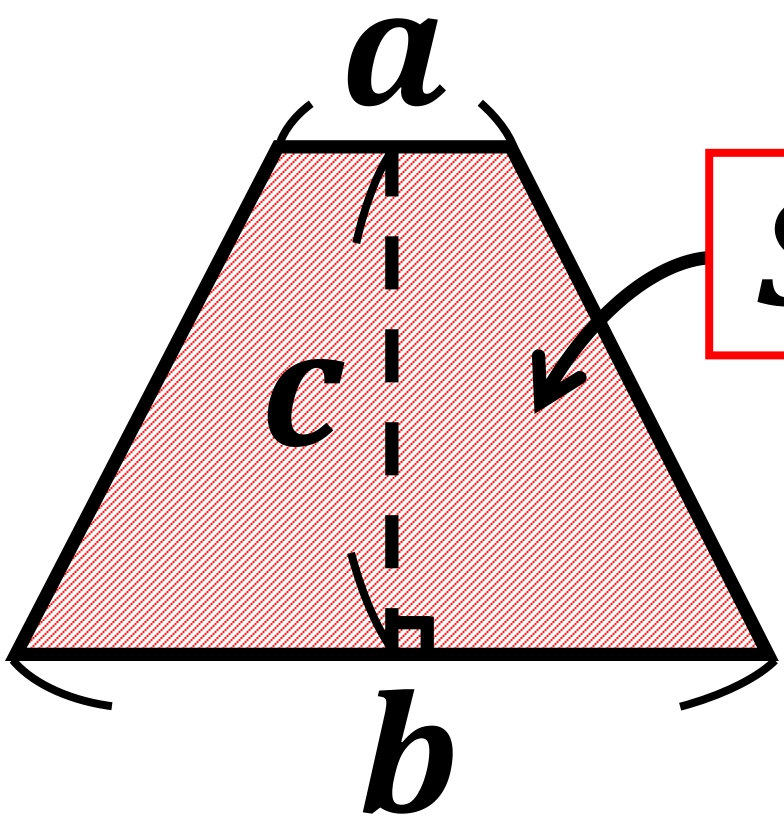
Step1



$$S=\overbrace{(\underset{上底}{a}+\underset{下底}{b})\times \underset{高さ}{c}}^{\text{長方形の面積}}\div 2$$

Step2

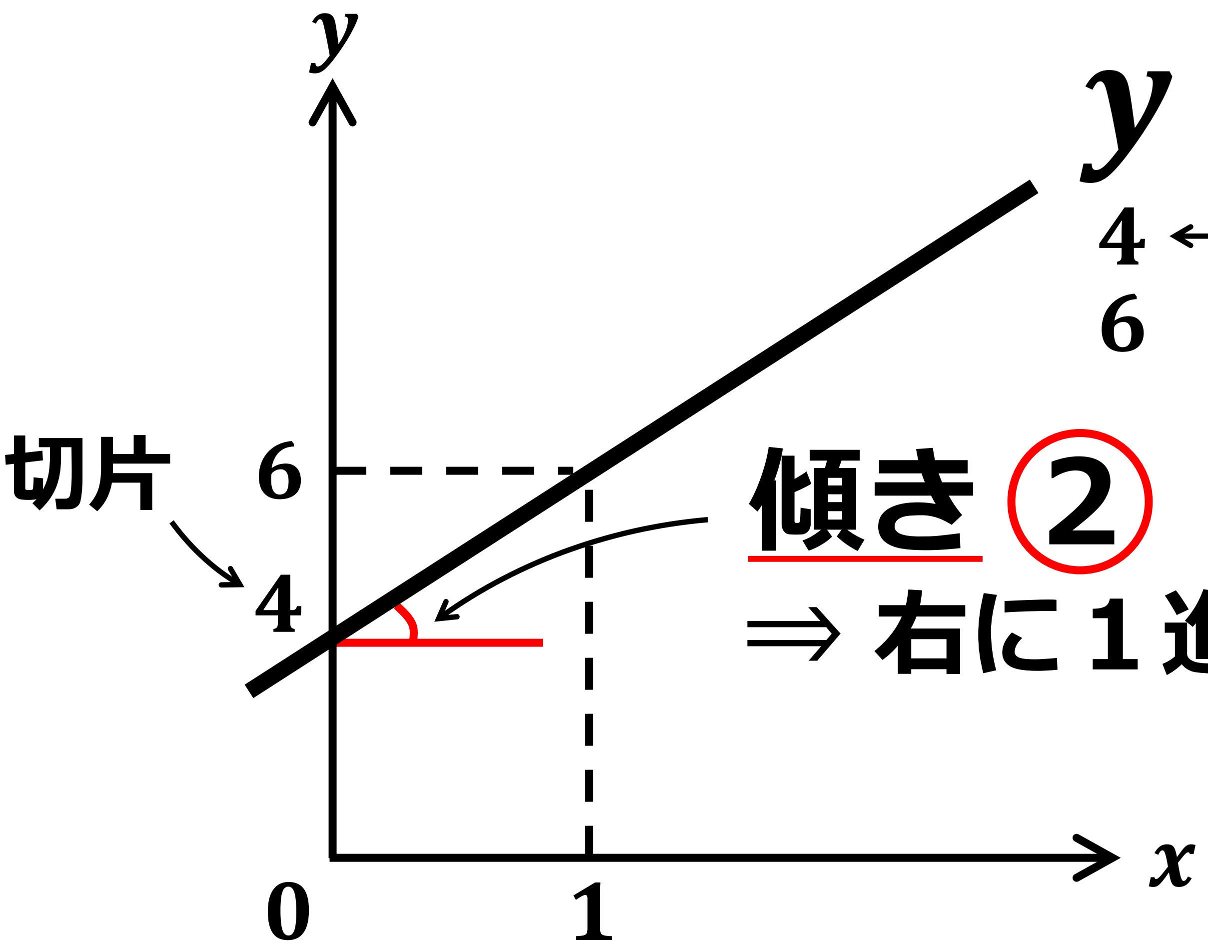
（易しい）



$$\boxed{S = (a+b) \times c \div 2}$$

7. グラフ

$$y = \underbrace{2}_{\text{傾き}}x + \underbrace{4}_{\text{切片}}$$



$$y = 2x + 4$$

$4 \leftarrow 0$

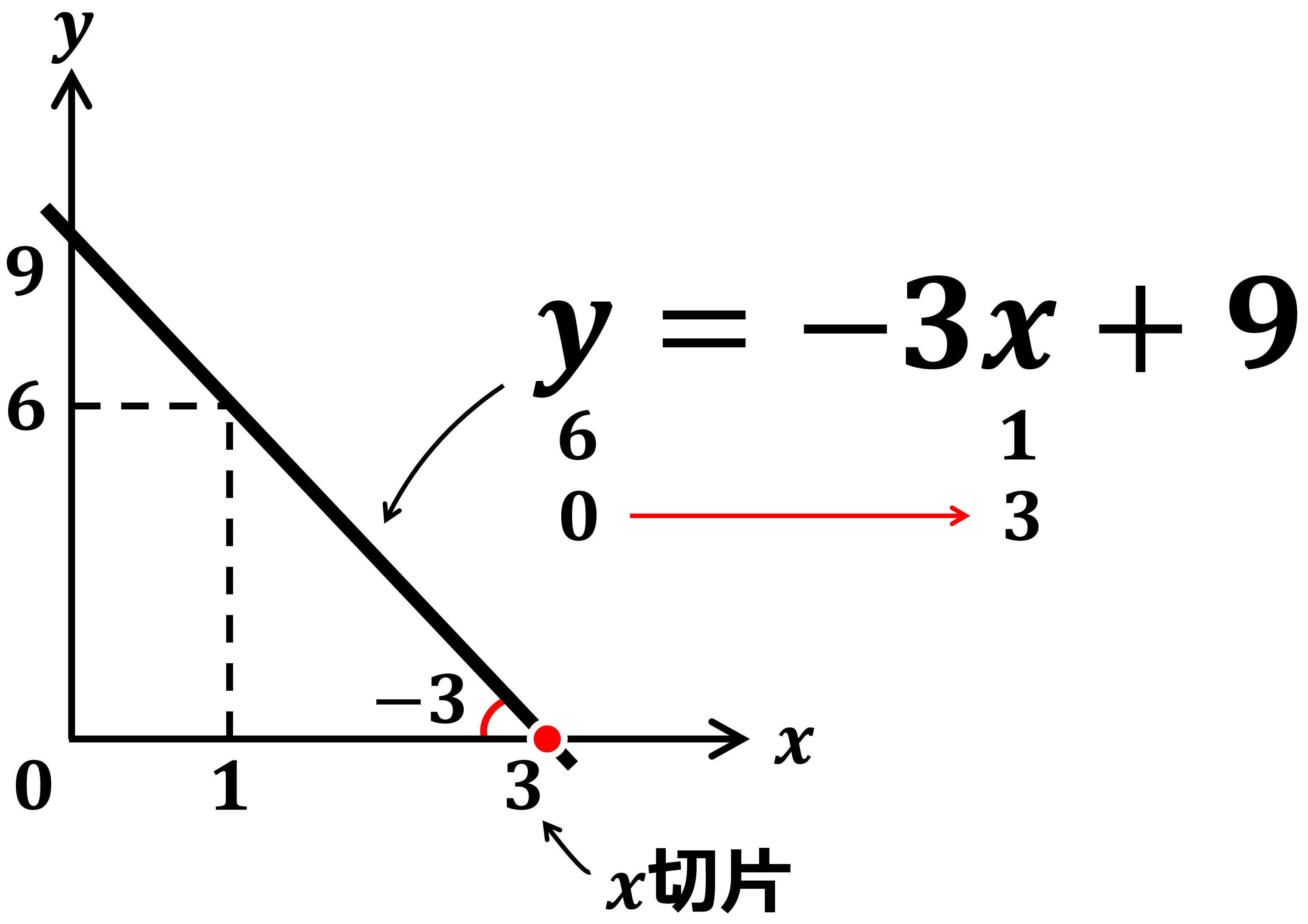
$6 \quad\quad 1$

傾き 2

⇒ 右に1進み、上に 2 あがる

Origin 原点

- $y = -3x + 9$



8. 連立方程式

⇒ 交点を求めるために使う

$$
\begin{cases}
x - \dfrac{1}{2}y = -2 & \cdots ① \\
3x + y = 9 & \cdots ②
\end{cases}
$$

より、

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 2x - y = -4 & & ：①×2 \\
+) & 3x + y = 9 & & ：② \\
\hline
 & 5x \qquad = 5 & & \\
 & x = 1 & &
\end{array}
$$

これを②(①)に代入すると、

$$3 \cdot 1 + y = 9 \quad : ②$$

$$y = 6$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 - \dfrac{1}{2}y = -2 \quad : ① \\ -\dfrac{1}{2}y = -3 \\ y = 6 \end{array} \right)$$

よって、

$$\underline{\underline{x = 1,\quad y = 6}}$$

ところで、

①より、

$$x - \frac{1}{2}y = -2$$

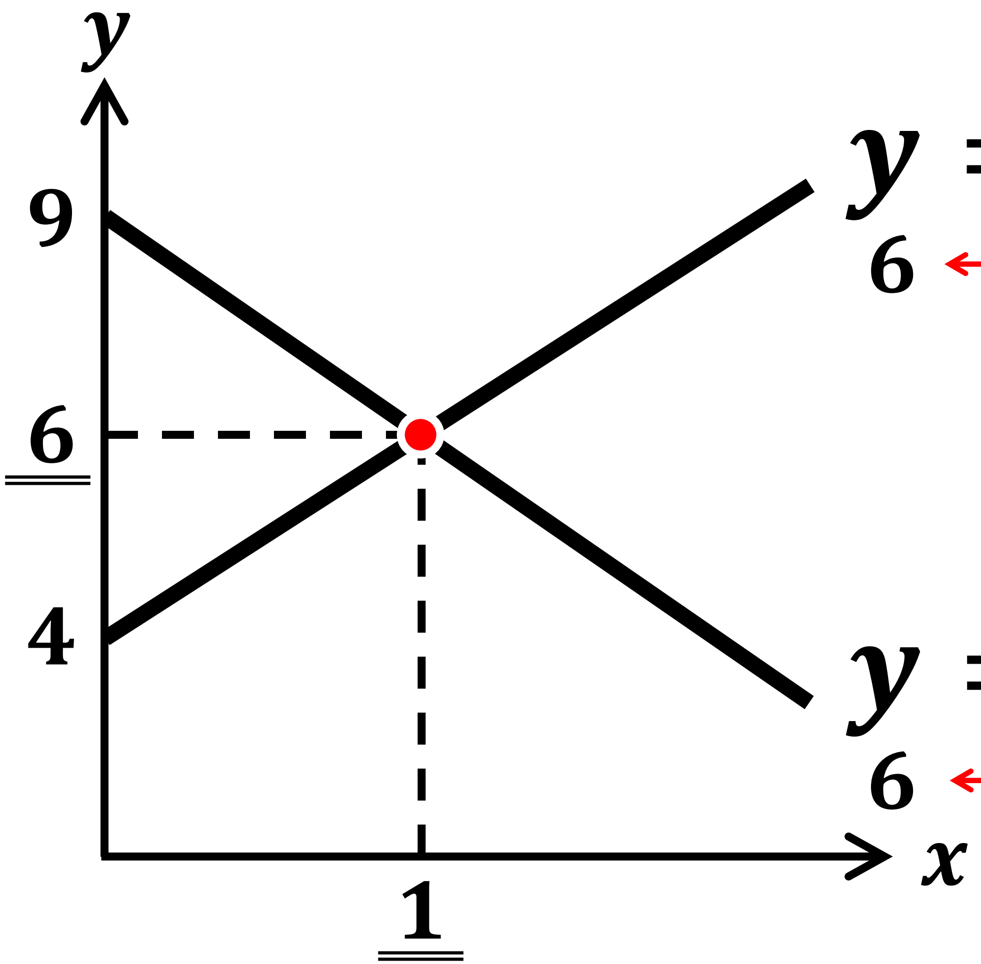
$$-\frac{1}{2}y = -x - 2$$

$$y = 2x + 4 \quad \cdots ①'$$

②より、

$$3x + y = 9$$

$$y = -3x + 9 \quad \cdots ②'$$



$$y = 2x + 4 \quad : ①'$$

$6 \leftarrow 1$

$$y = -3x + 9 : ②'$$

$6 \leftarrow 1$

・よく使う解き方

$$\begin{cases} y = \boxed{2x + 4} & \cdots ①' \\ y = \boxed{-3x + 9} & \cdots ②' \end{cases}$$

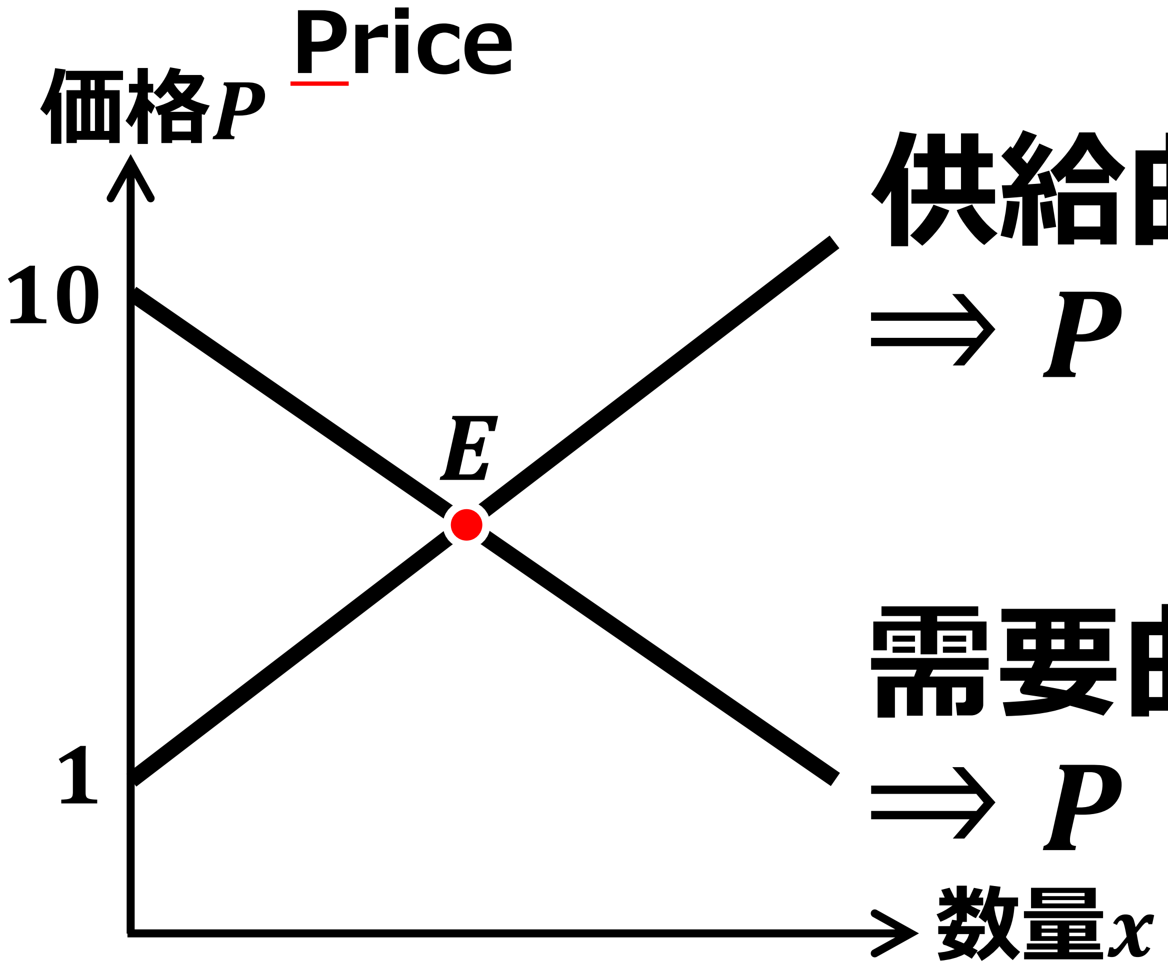
①'と②'の右辺どうしを
くっつけると、

$$\boxed{2x+4} = \boxed{-3x+9}$$

$$5x = 5$$

$$x = \underline{\underline{1}}$$

・連立方程式の活用例



供給曲線

$$\Rightarrow P = x + 1$$

需要曲線

$$\Rightarrow P = -2x + 10$$

模型

このようなモデルを
考えたとき、
交点Eを求めるには、

$$\begin{cases} P = \boxed{-2x + 10} & \cdots ① \\ P = x + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

連立すると、

$$-2x+10=x+1$$

$$-3x=-9$$

$$x^{*}=\underline{\underline{3}}$$

＊スター（アスタリスク）

これを①（②）に代入して、

$$\boldsymbol{P^*} = -\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} + \mathbf{10} \quad : ①$$

$$= \mathbf{4}$$

$$\left(\begin{aligned} \boldsymbol{P^*} &= \mathbf{3} + \mathbf{1} \quad : ② \\ &= \mathbf{4} \end{aligned} \right)$$

補足

先のPとx

内生変数
：モデル内で値が決まる変数

外生変数
：モデル外で値が決まっている変数

イメージ

$$
\begin{cases}
y = ax + b \\
y = cx + d
\end{cases}
$$

このとき、

内生変数：x, y

外生変数：a, b, c, d

9. 微分

Step1 かける

$$y = 4x^{3}$$

Step2 ひく 1

$$\times 3 \qquad -1$$

$$12x^{2}$$

Step1 かける

$$y = 4x^{3}$$ Step2 ひく 1

$$\xrightarrow{x\text{でビブン}} \; y' = 4 \times 3x^{3-1} = 12x^{2}$$

$\dfrac{dy}{dx}$: $y = \cdots$ を x でビブン

$y = ax^b$のとき

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = abx^{b-1}}$$

- $y = ax \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a$

  $y = 5x \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5$

- $y = a \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

  $y = 2 \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

例　$y = 4x^3 + 5x + 2$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^{3-1} + 5 + 0$$

$$= 12x^2 + 5$$

$$y = x^2 - x + 3$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} - 1 + 0$$

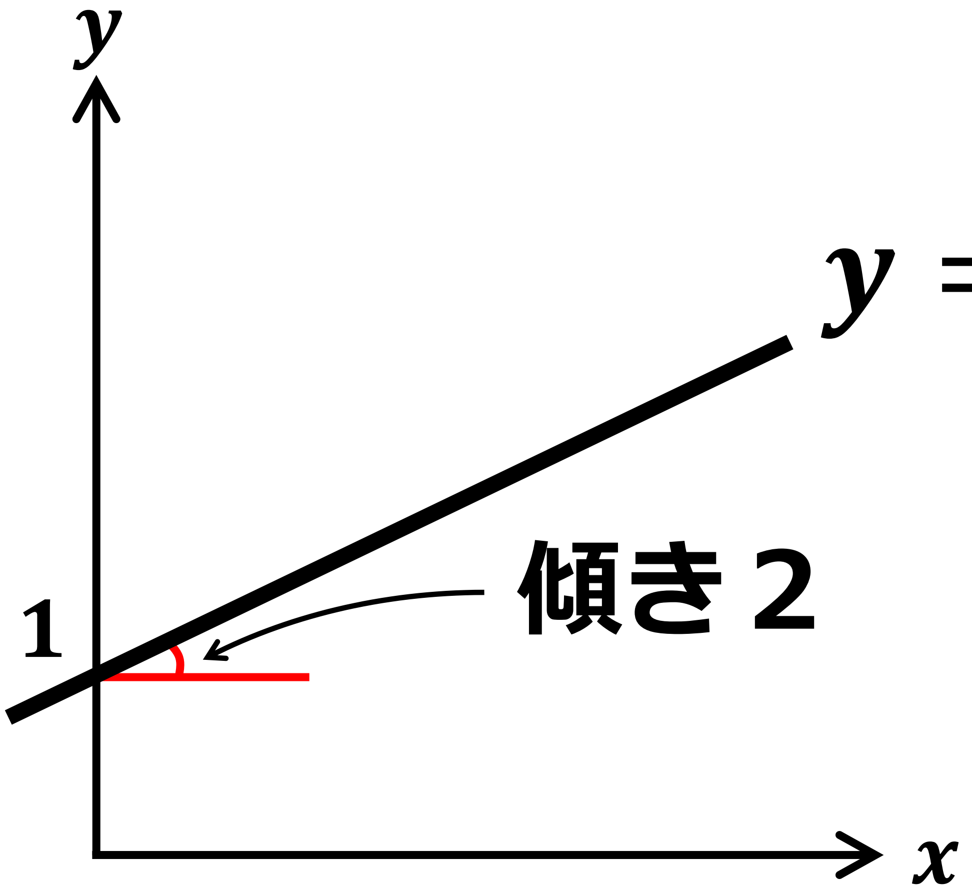
$$= 2x - 1$$

ポイント

微分とは 傾きを求めること

接線の

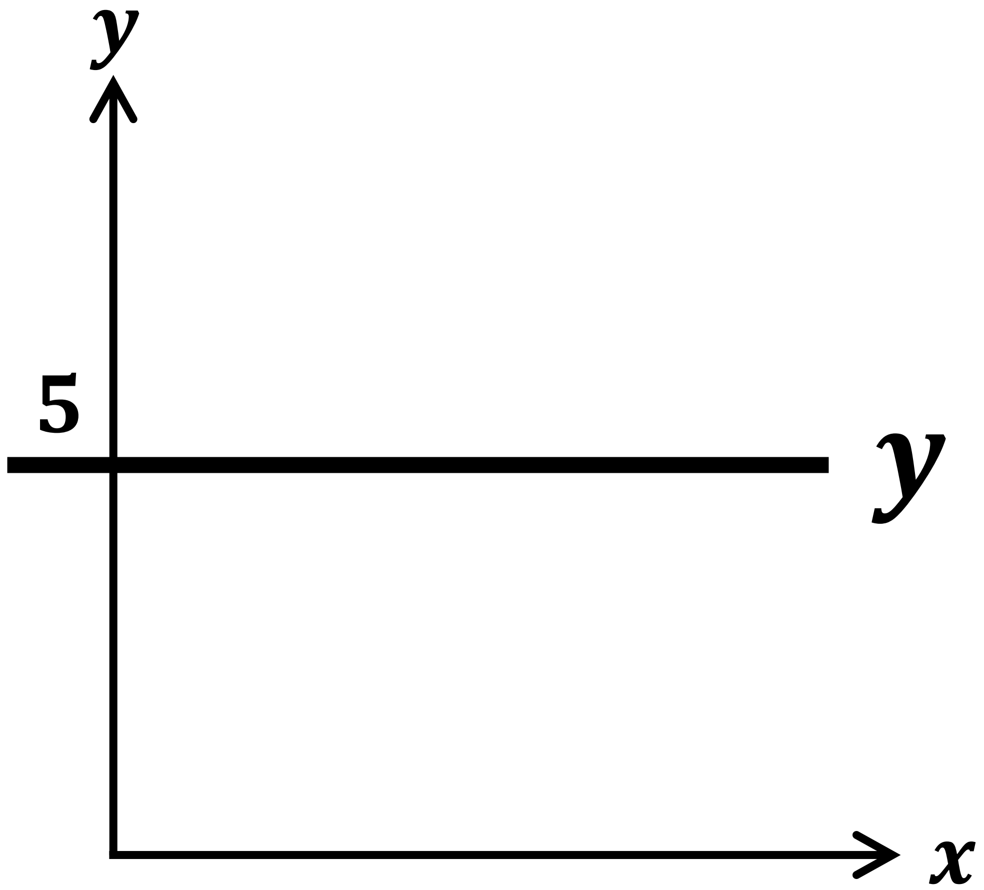
- $y = 2x + 1$



$$y = 2x + 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2$$

傾き

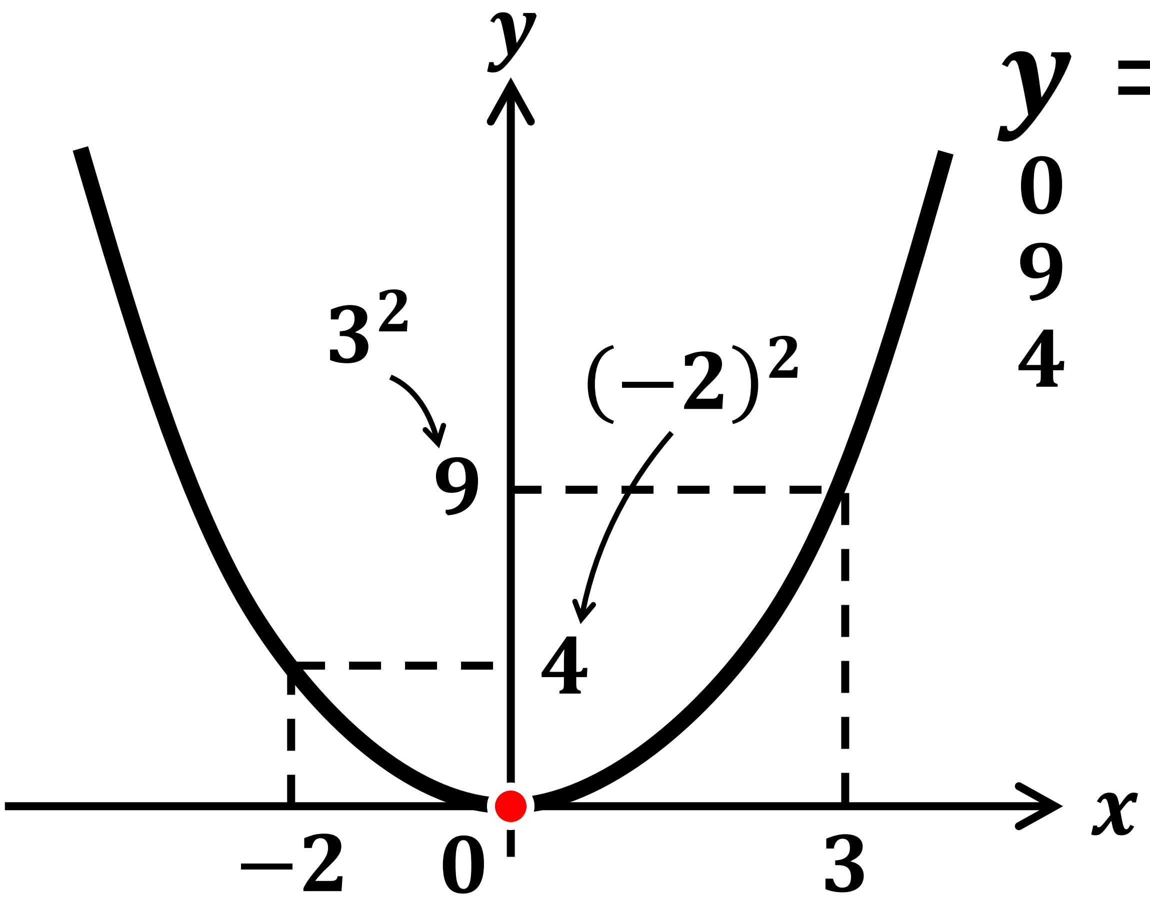
- $y = 5$



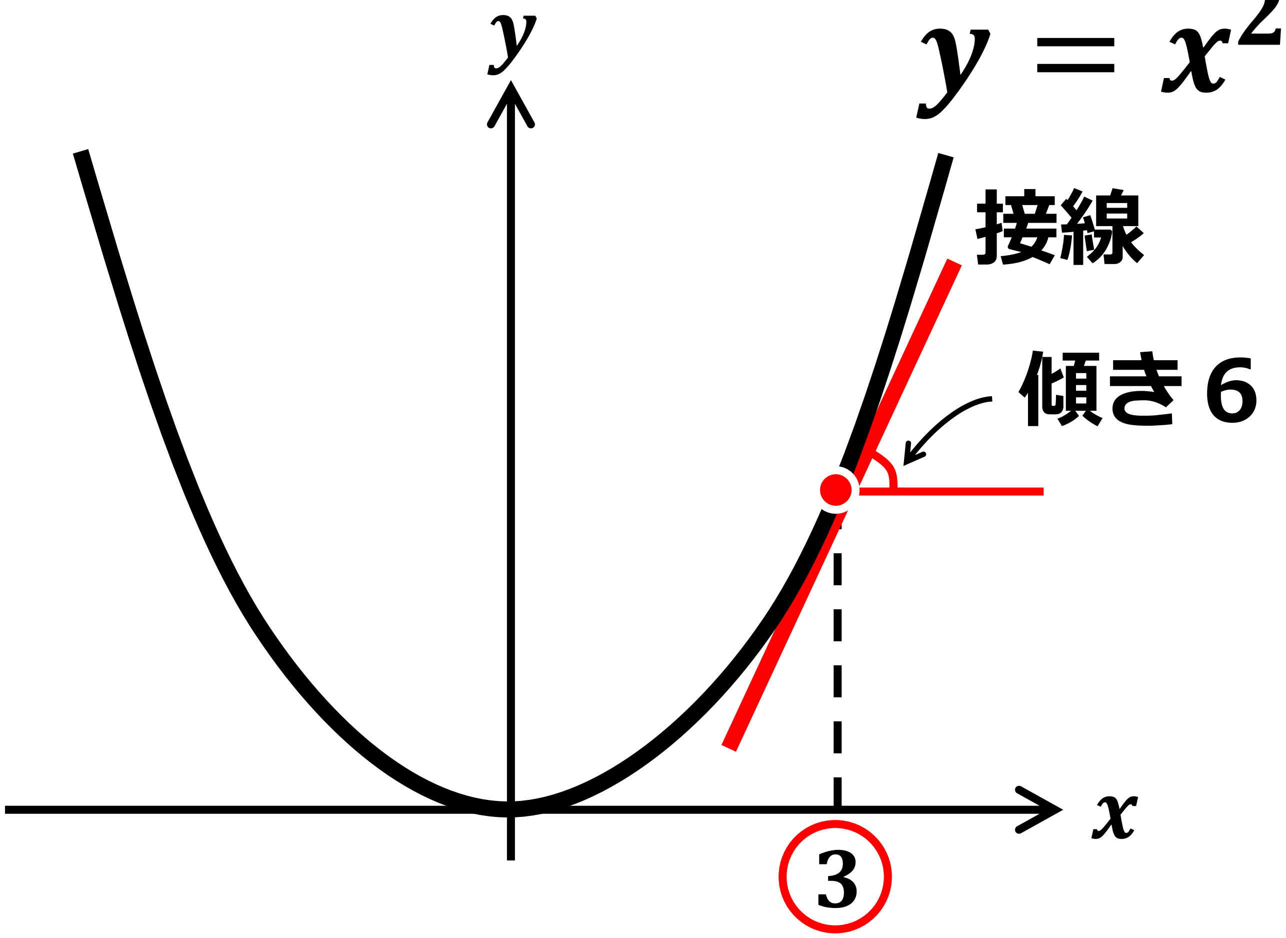
$$y = 5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

傾き

- $y = x^2$



y	$=$	x^2
0		0
9		3
4		-2



$$y = x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

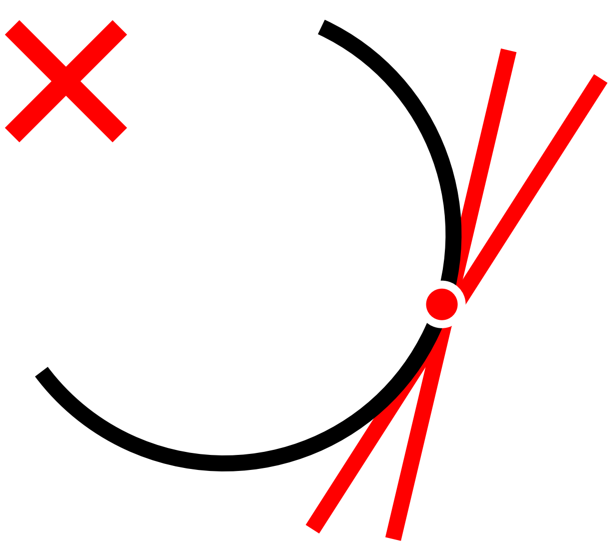
$$= 2 \cdot 3$$

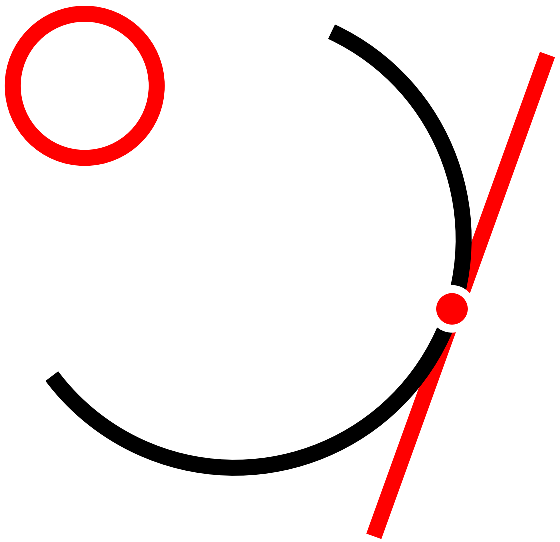
$$= 6$$

傾き

注意

曲線上の一点で書ける
接線は一本だけ！

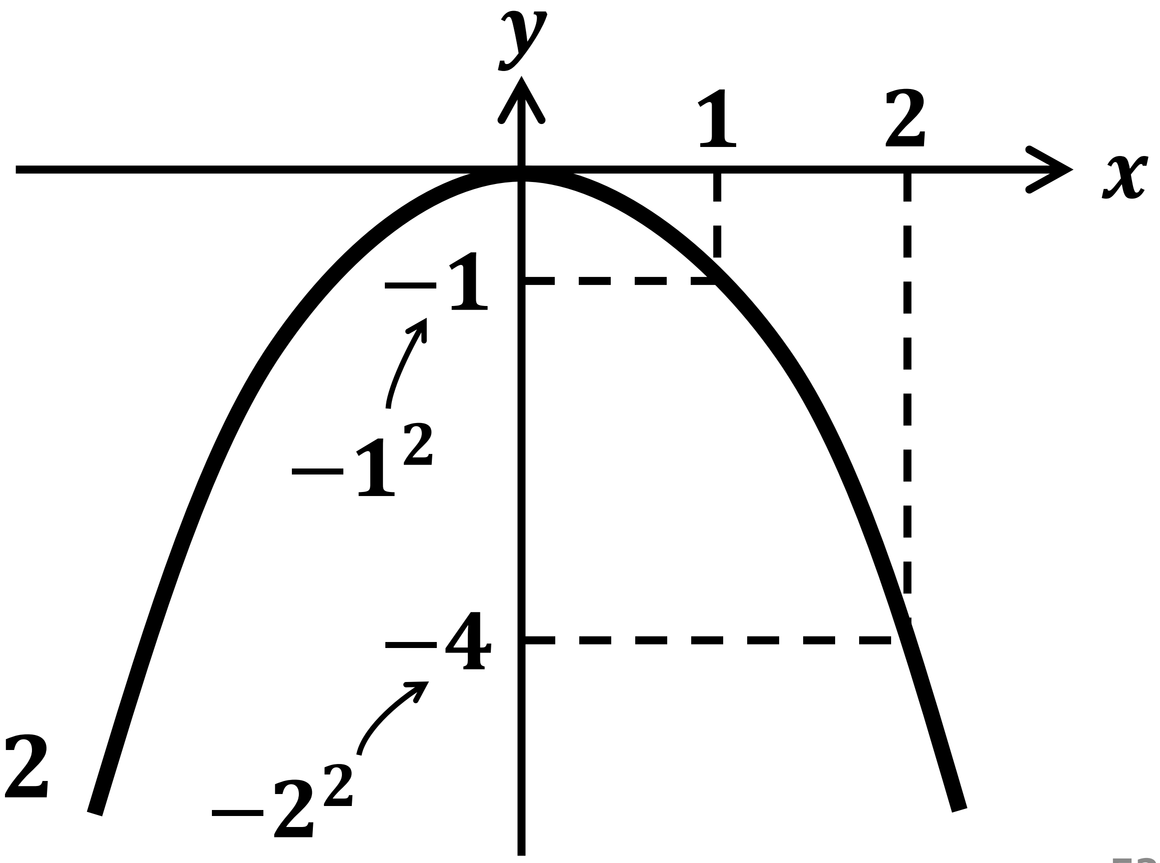




ビブンの活用例①

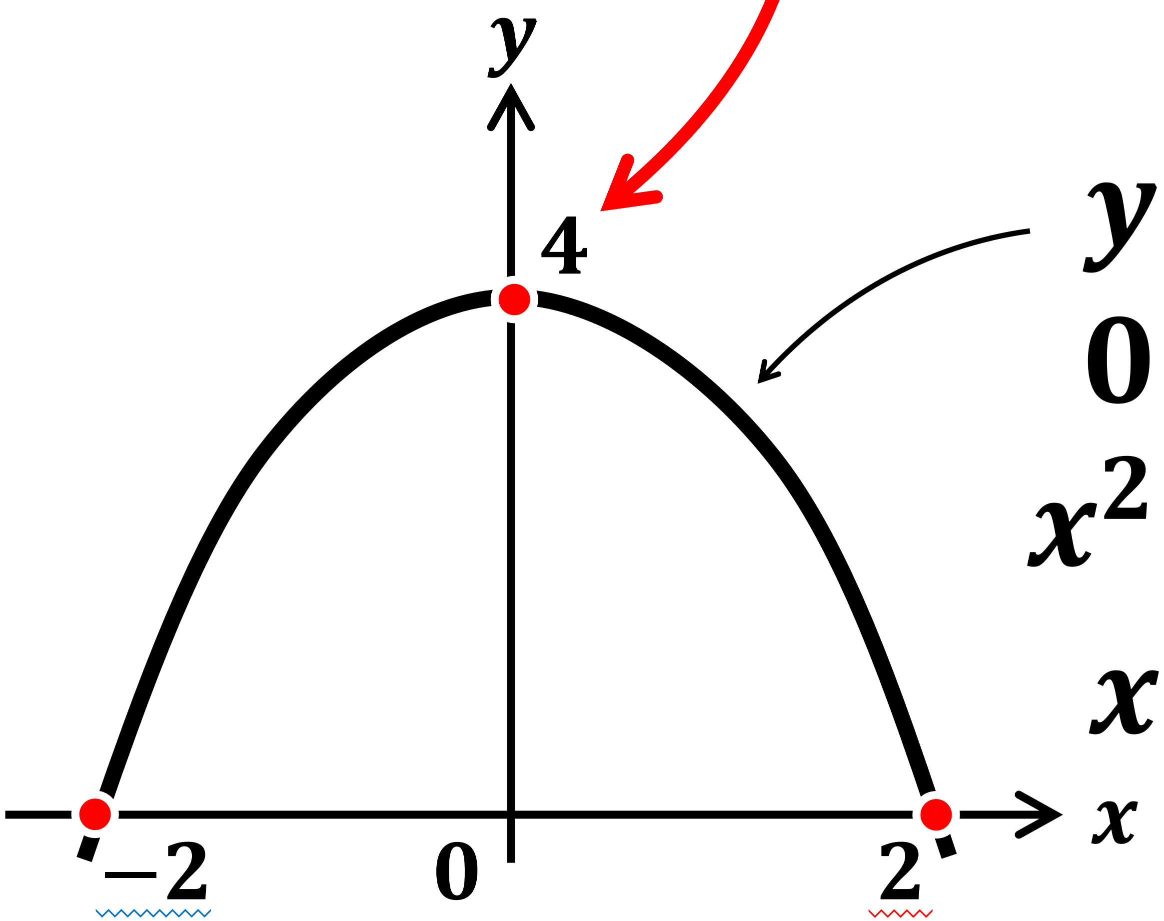
準備

- $y = - x^2$



- $y = -x^2 + 4$

$4 \leftarrow 0$

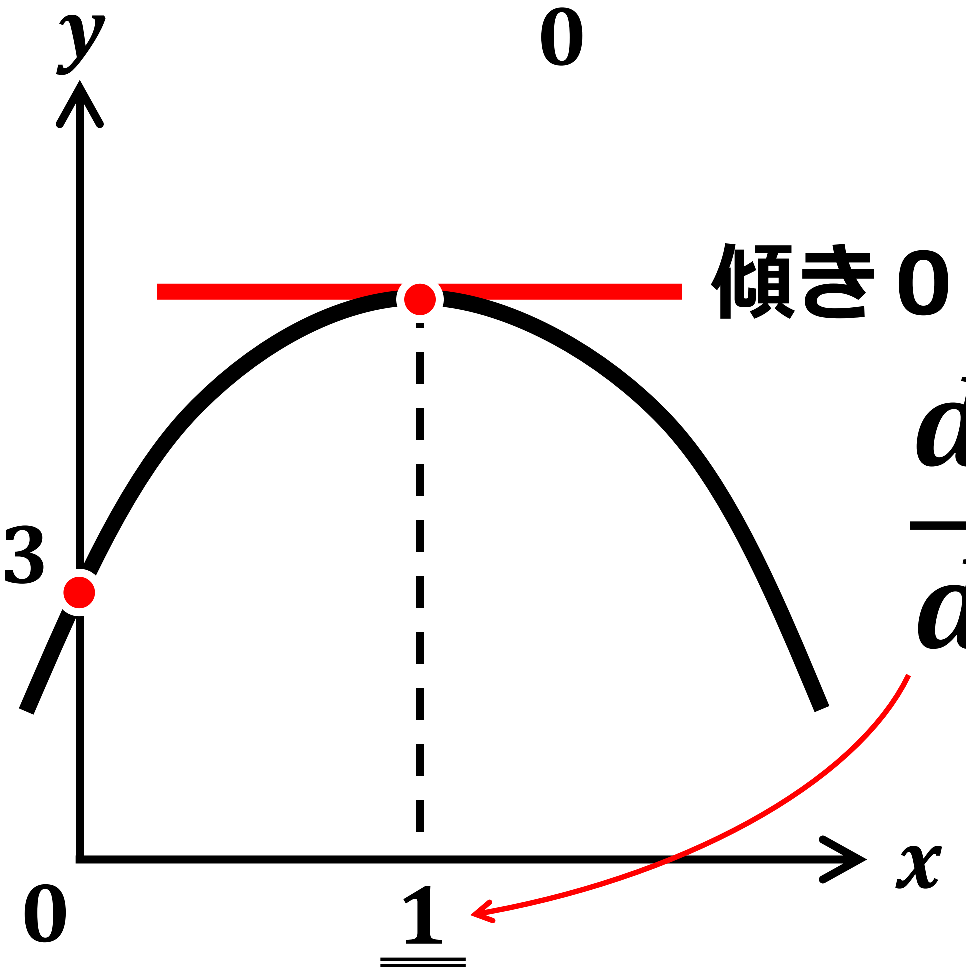


$$y = -x^2 + 4$$
$$0 = -x^2 + 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2, -2$$

$y = -x^2 + 2x + 3$ の頂点は？

3

0

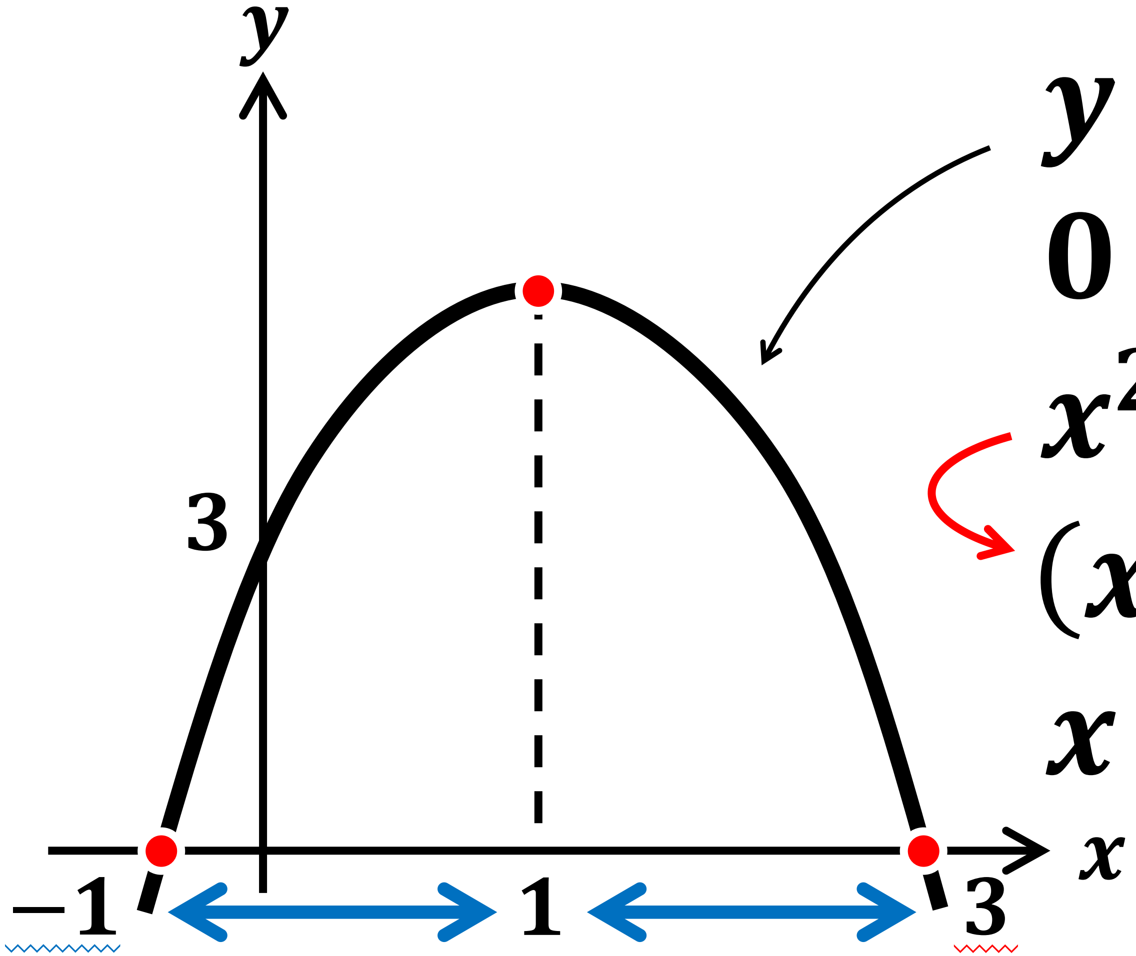


$$\frac{dy}{dx} = -2x + 2 = 0$$

1

傾き

補足　因数分解



$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$0 = -x^2 + 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, -1$$

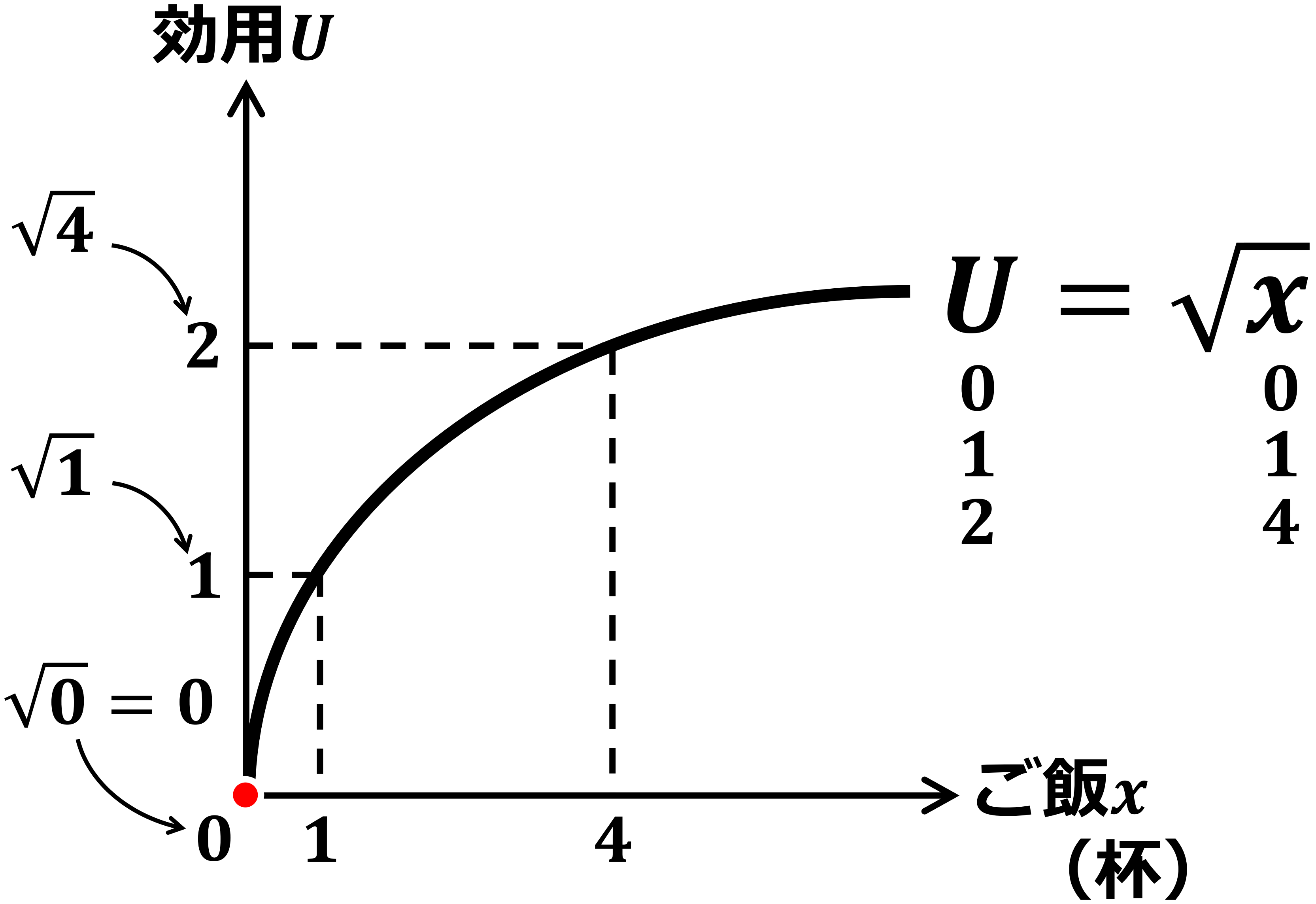
ビブンの活用例②

$$U = \sqrt{x}$$

ただし、 Utility

Uは効用（満足度）

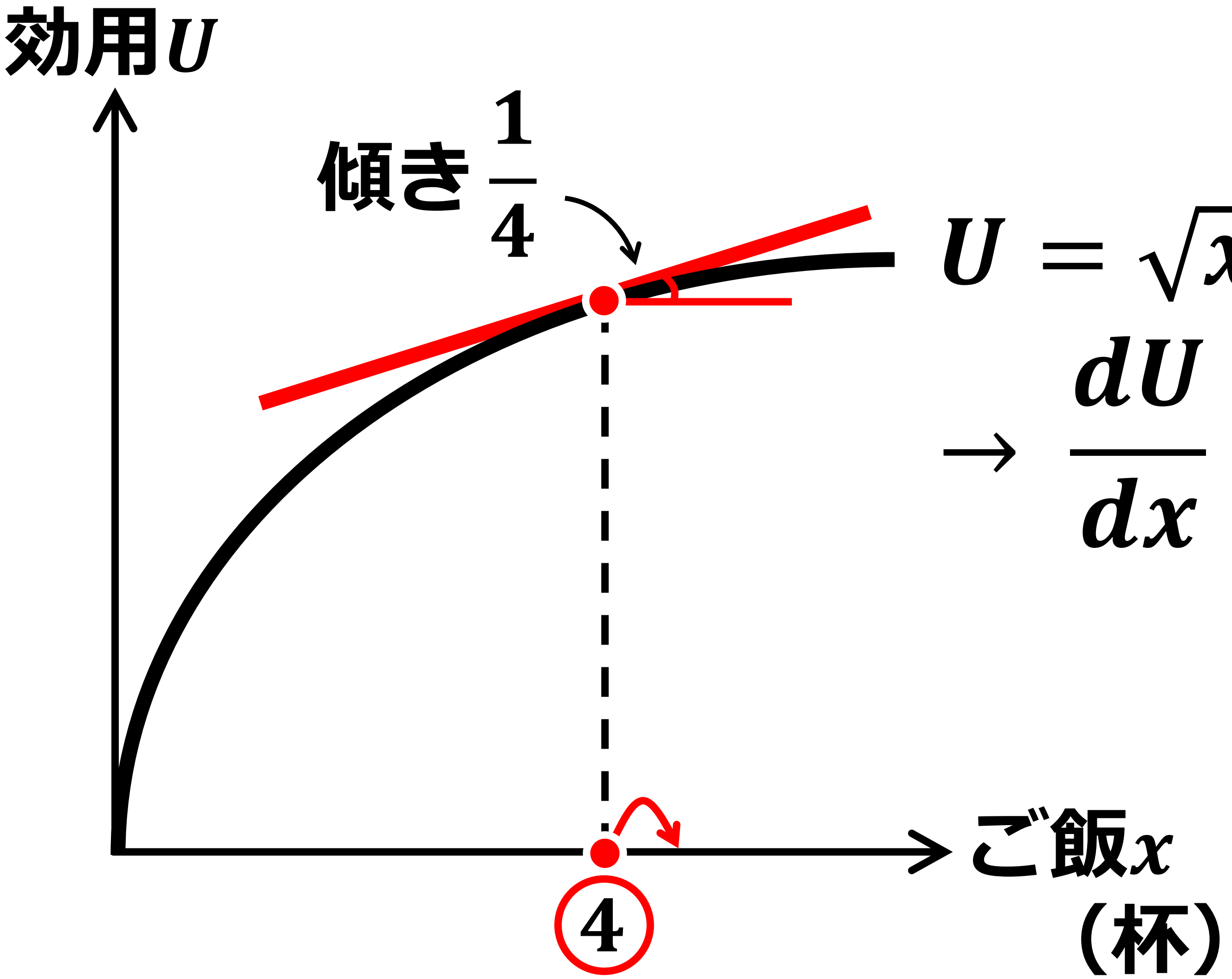
xはご飯の消費量


効用U
$\sqrt{4}$
2
$\sqrt{1}$
1
$\sqrt{0}=0$
0
1
4
ご飯x
（杯）
$U = \sqrt{x}$
0 0
1 1
2 4

$$U = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

より、

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$U = \sqrt{x}$$

$$\to \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

傾き

傾き$\frac{1}{4}$より、

５杯目のご飯をおかわり

すると効用が$\frac{1}{4}$上がる

10. 偏微分

$$z = 2x^3 + y^2$$

$$\xrightarrow{x\text{で偏ビブン}} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 0$$

$$= 6x^2$$

ラウンド(デルタ)
(ディー)

$\Rightarrow$ yを定数としてビブン

$$z = 2x^3 + y^2$$

$$\xrightarrow{y\text{で偏ビブン}} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y$$

$$= 2y$$

$\Rightarrow$ xを定数としてビブン

- $z = x^3 y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{3-1} \cdot y^2 = 3x^2 y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 2y^{2-1} = 2x^3 y$$

- $z = 2xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$$

11. 関数

（やや難）

$$y = 2x + 1$$

↓ 次のように書いてもいい

$$\boxed{y = f(x)}$$

function 関数, 機能

⇒ y は x の関数

（y の値は x の値で決まる）

考え方　（やや難）

$$
\begin{tikzcd}
y = 2x + 1 \arrow[r, red] \arrow[d, "x = 2"] & y = f(x) \arrow[d, "x = 2"] \\
y = 2 \cdot 2 + 1 \arrow[r, red] & y = f(2)
\end{tikzcd}
$$

$$= 5$$

$$y = 2x + 1$$

（やや難）

ここで、

$$f(x) = 2x + 1$$

とおくと、

$x = 2$のとき、

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

イメージ

（やや難）

関数fに $x=2$ を代入： $f(2)$

$$x \xrightarrow{\text{入力}} \boxed{f} \xrightarrow{\text{出力}} y$$

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　5

fという名前の機械

（やや難）

ちなみに、

$y = 2x + 1$ ：一次関数

$y = x^2 + 2x + 3$ ：二次関数

（やや難）

例　効用関数

$$U = \sqrt{x}$$

⇒ 効用U は消費量x の関数

この効用関数は、
次のように書いてもいい

① $U=\sqrt{x}$（元） （やや難）

② $U=f(x)=\sqrt{x}$ ：△

③ $f(x)=\sqrt{x}$ ：△

④ $U(x)=\sqrt{x}$

⑤ $U=U(x)=\sqrt{x}$ ：△

⑥ $U=U(x)$ ← 投資関数を $I=I(r)$ と書くのと同じ

（やや難）

イメージ

$$x \longrightarrow \boxed{U} \longrightarrow U$$

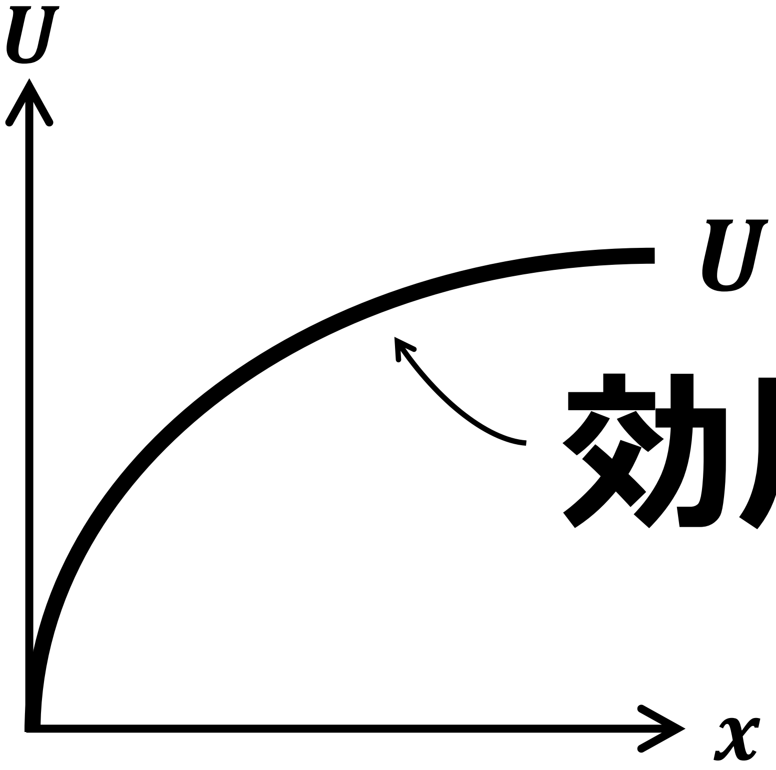
4

$\sqrt{4} = 2$

機械にUという名前をつけた

ちなみに、　（やや難）

$U = \sqrt{x}$ ：効用関数



12．数列

（やや難）

無限等比級数

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

3, 6, 12, 24

：無限に続く等比数列の和

$$S = \underset{\text{初項}}{a} + a \cdot \underset{\text{公比}}{r} + a \cdot r^2 + \cdots$$

（やや難）

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots$$

$$= \boxed{\frac{a}{1-r}} \left(\begin{array}{l} \text{ただし、} \\ -1 < r < 1\text{のとき} \end{array}\right)$$

理由

（やや難）

$$S = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} \quad ：①$$

$$-)\ rS = \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} \quad ：①\times r$$

$$S - rS = a$$

$$(1-r)S = a$$

$$S = \underline{\underline{\frac{a}{1-r}}}$$

例　　（やや難）

$$\overset{\times 0.8}{\frown}\ \overset{\times 0.8}{\frown}\ \overset{\times 0.8}{\frown}$$

$$\underset{a}{1} + 0.8 + 0.64 + 0.512 + \cdots$$

$$= \frac{\overset{a}{1}}{1 - \underset{r}{0.8}} = \frac{1}{0.2} \left(= \frac{1 \times 10}{0.2 \times 10} = \frac{10}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{5}}$$

数学力を高めるには…

とにかく問題を解く！