はじめよう経済学

# 第０講 経済数学入門

講師：加藤 真也

# 経済学に数学力は必要か？

# 経済学で必要な数学力

- 中学数学＋微分
- 大学受験の数学の問題より
  ずっと簡単
- 経済学で使う数学の範囲は
  かなり限られている

# 経済学で登場する数学

◎ 頻出
連立方程式・グラフ・**指数**
・関数・**微分**・偏微分

△ ほとんど出ない
積分・三角関数・複素数

# 今回（第０講）は…

1. 分数
2. 逆数
3. 両辺に～
4. 変化率
5. 指数
6. 図形（易しい）
7. グラフ
8. 連立方程式
9. 微分
10. 偏微分
11. 関数（やや難）
12. 数列（やや難）

# 1. 分数

- $\dfrac{1}{2} = 1 \div 2$
- $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$

# 2. 逆数

- $\frac{3}{1}$ 3の逆数は$\frac{1}{3}$

かけると1

- $\frac{2}{3}$の逆数は$\frac{3}{2}$

・ $A \overset{\text{大なり}}{>} \dfrac{C}{B}$ のとき

両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{A} < \frac{B}{C}$$

例 $2 > \dfrac{2}{3} \xrightarrow{\text{逆数}} \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{2}$

約0.66…

# 3. 両辺に～

## ① 両辺を2乗する

例 2＝2

$$x = y$$

より、

4＝4

$$x^2 = y^2$$

## ② 移項(1)

4=4

$$x - 2 = 4$$

4+2=4+2

**両辺に2を足して、**

$$x - 2 + 2 = 4 + 2$$

$$x = 4 + 2$$

$$x = 6$$

## ③ 移項(2)

6=6

$$2x = 6$$

6÷2=6÷2

両辺を2で割って、

$$2x \div 2 = 6 \div 2$$

$$x = 6 \div 2$$

$$x = 3$$

例　$\frac{1}{3}x+2=6$ を解け

$$\frac{1}{3}x+2\underline{-2}=6\underline{-2}$$

$$\frac{1}{3}x=4$$

$$\frac{1}{3}x\underline{\times 3}=4\underline{\times 3}$$

$$x=\underline{\underline{12}}$$

# 4. 変化率

Price

価格を$P$とおく

$P$ ：120円 → 150円

のとき、

デルタ

$\Delta P = 150 - 120 = 30$円

変化分

$P$：100円 → 110円 (10%↑)

$P$：110円 → 121円　　$\dfrac{110-100}{100} = 0.1$

$$\frac{121-110}{110} \begin{array}{l} \leftarrow \Delta P \\ \leftarrow 変化前のP \end{array}$$

$$= \frac{11}{110} = 0.1\ (10\%\uparrow)$$

$$\boxed{\text{価格の変化率} = \frac{\Delta P}{\underset{\text{変化前}}{P}}}$$

# 5. 指数　$2^{5}$

- $x^0 = 1$　　例 $2^0 = 1$
- $x^1 = x$　　例 $2^1 = 2$
- $x^{-1} = \frac{1}{x}$　　例 $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$　　例 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

例　$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

- $x^a \times x^b = x^{a+b}$

例　$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$

- $$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

  例1 $\dfrac{x^5}{x^2} = \dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x \cdot x}}{\cancel{x \cdot x}} = x^3$

  例2 $\dfrac{x^4}{x^4} = x^{4-4} = x^0 = 1$

- $$(x^a)^b = x^{ab}$$

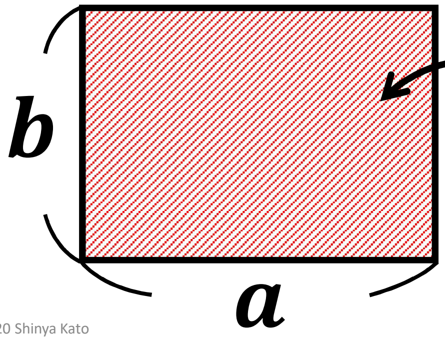
  例 $\left(x^2\right)^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^6$

# 6. 図形

（易しい）

## ・三角形

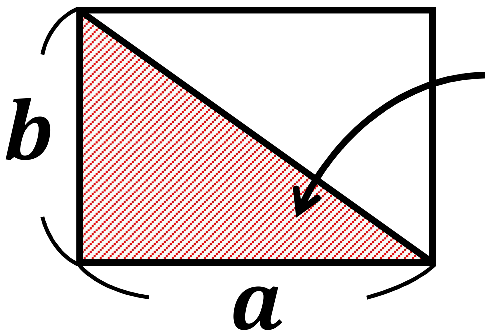
### Step1




面積$S = a \times b$

（易しい）

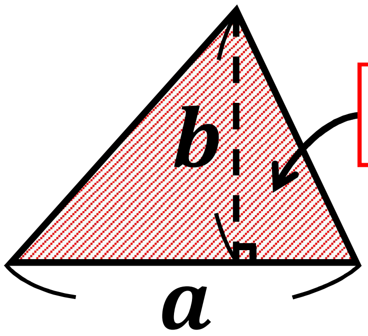
## Step2




$$S = \underbrace{a \times b}_{\text{長方形の面積}} \div 2$$

（易しい）

# Step3

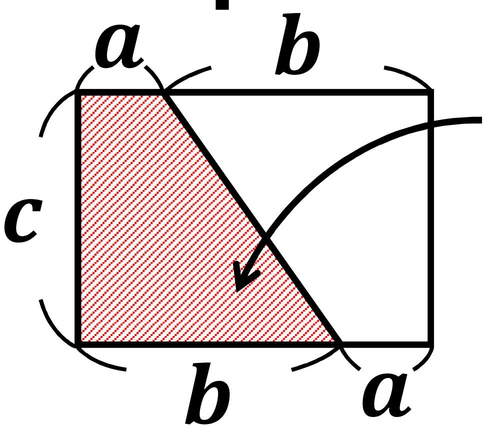



$$\boxed{S = a \times b \div 2}$$

## ・台形

## Step1

（易しい）

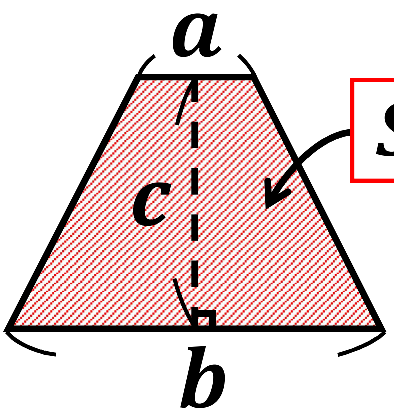



$$S = \overbrace{(a+b)\times c}^{\text{長方形の面積}} \div 2$$

上底　下底　高さ

## Step2

（易しい）

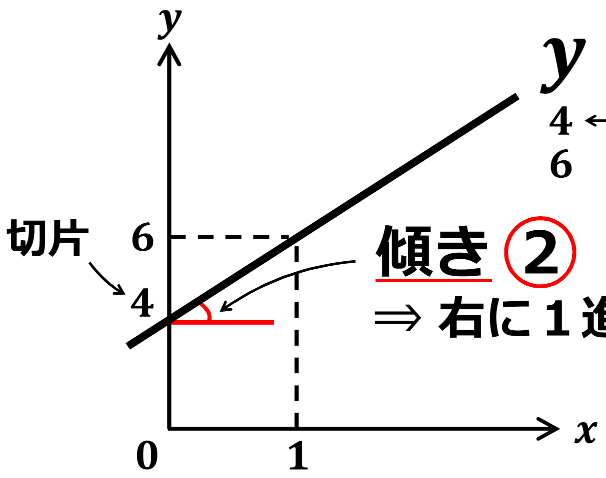



$$\boxed{S = (a + b) \times c \div 2}$$

# 7. グラフ

$$y = 2x + 4$$

傾き　切片




$$y = 2x + 4$$

$4 \leftarrow 0$

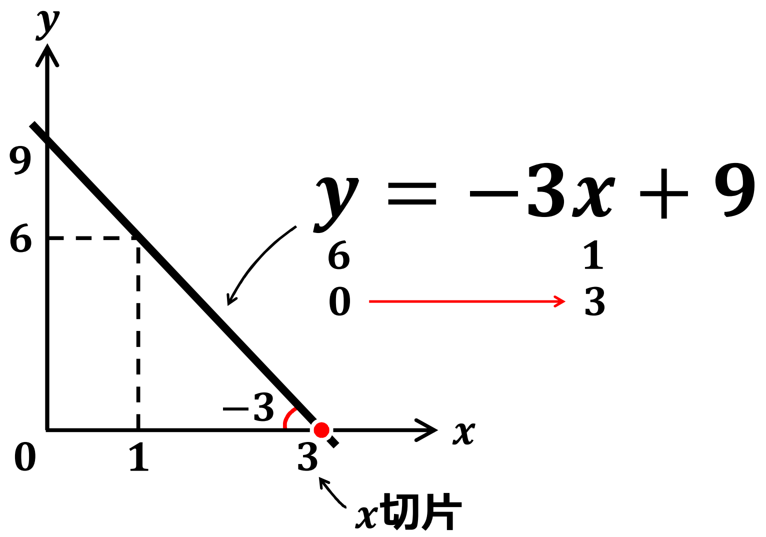
$6 \qquad 1$

**傾き 2**

⇒ 右に 1 進み、上に 2 あがる

Origin 原点

- $y = -3x + 9$



# 8. 連立方程式

## ⇒ 交点を求めるために使う

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = -2 & \cdots ① \\ 3x + y = 9 & \cdots ② \end{cases}$$

より、

$$
\begin{array}{rl}
2x - y = -4 & ：①×2 \\
+) \quad 3x + y = 9 & ：② \\
\hline
5x \qquad = 5 & \\
x = 1 &
\end{array}
$$

これを②（①）に代入すると、

$$3 \cdot 1 + y = 9 \quad : ②$$

$$y = 6$$

$$\left( \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}y &= -2 \quad : ① \\ -\frac{1}{2}y &= -3 \\ y &= 6 \end{aligned} \right)$$

よって、

$$\underline{\underline{x = 1, \quad y = 6}}$$

ところで、

①より、

$$x - \frac{1}{2}y = -2$$

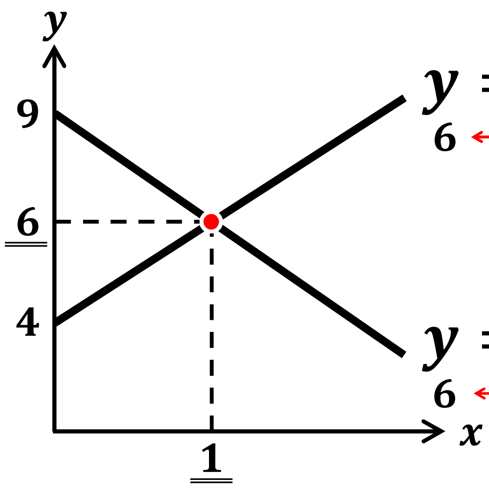
$$-\frac{1}{2}y = -x - 2$$

$$y = 2x + 4 \quad \cdots ①'$$

②より、

$$3x + y = 9$$

$$y = -3x + 9 \quad \cdots ②'$$




$$y = 2x + 4 \quad : ①'$$

$$6 \longleftarrow 1$$

$$y = -3x + 9 : ②'$$

$$6 \longleftarrow 1$$

・よく使う解き方

$$\begin{cases} y = \boxed{2x + 4} & \cdots ①' \\ y = \boxed{-3x + 9} & \cdots ②' \end{cases}$$

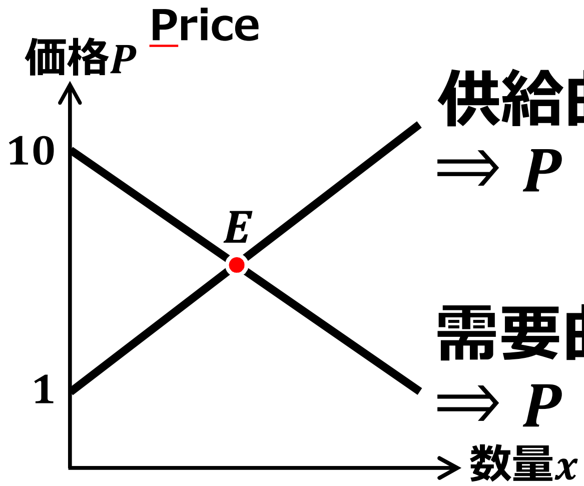
①'と②'の右辺どうしをくっつけると、

$$\boxed{2x + 4} = \boxed{-3x + 9}$$

$$5x = 5$$

$$x = \underline{\underline{1}}$$

# ・連立方程式の活用例




**供給曲線**

$\Rightarrow P = x + 1$

**需要曲線**

$\Rightarrow P = -2x + 10$

模型

このような<u>モデル</u>を
考えたとき、
交点$E$を求めるには、

$$\begin{cases} P = \boxed{-2x+10} \cdots ① \\ P = \boxed{x+1} \cdots ② \end{cases}$$

連立すると、

$$-2x + 10 = x + 1$$

$$-3x = -9$$

$$x^* = \underline{\underline{3}}$$

＊スター（アスタリスク）

これを①（②）に代入して、

$$P^* = -2 \cdot 3 + 10 \quad : ①$$
$$= \underline{\underline{4}}$$
$$\left( \begin{aligned} P^* &= 3 + 1 \quad : ② \\ &= 4 \end{aligned} \right)$$

# 補足

先の$P$と$x$

**内生変数**

：モデル内で値が決まる変数

**外生変数**

：モデル外で値が決まっている変数

# イメージ

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

このとき、

内生変数：$x, y$

外生変数：$a, b, c, d$

# 9. 微分

Step1 かける

$$y = 4x^{3}$$ Step2 ひく 1

$$\times 3 \qquad -1$$

$$12x^{2}$$

Step1 かける

$y = 4x^{3}$ Step2 ひく 1

$\xrightarrow{x\text{でビブン}} y' = 4 \times 3x^{3-1} = 12x^{2}$

$\dfrac{dy}{dx}$ : $y = \cdots$ を $x$ でビブン

$\boldsymbol{y = ax^b}$**のとき**

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = abx^{b-1}}$$

- $y = ax \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a$

  $y = 5x \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5$

- $y = a \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

  $y = 2 \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

例 $y = 4x^3 + 5x + 2$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^{3-1} + 5 + 0$$

$$= 12x^2 + 5$$

$$y = x^2 - x + 3$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} - 1 + 0$$

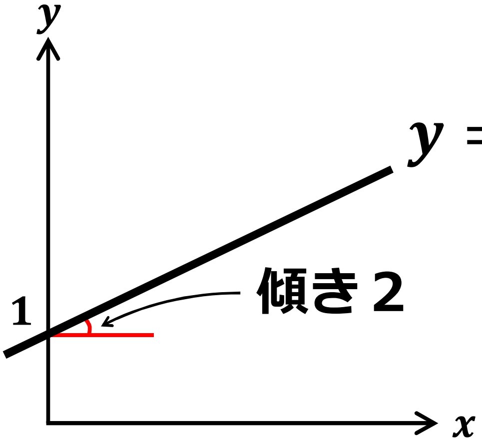
$$= 2x - 1$$

## ポイント

微分とは傾きを求めること

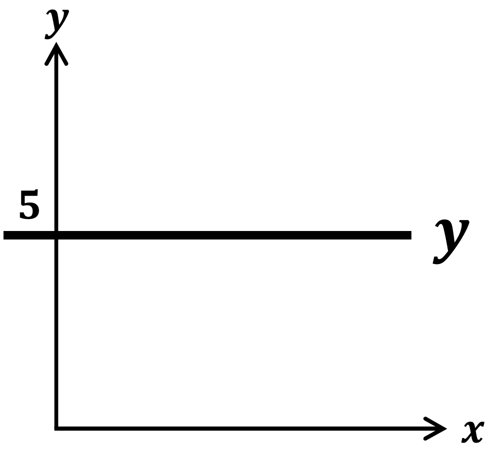
接線の

- $y = 2x + 1$



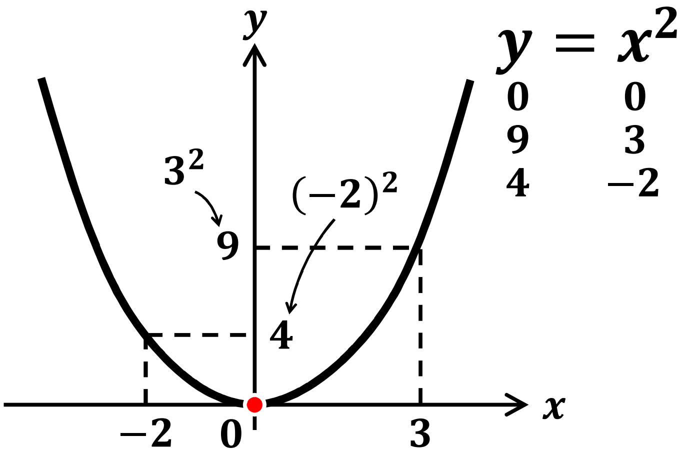

$$y = 2x + 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{2}_{傾き}$$

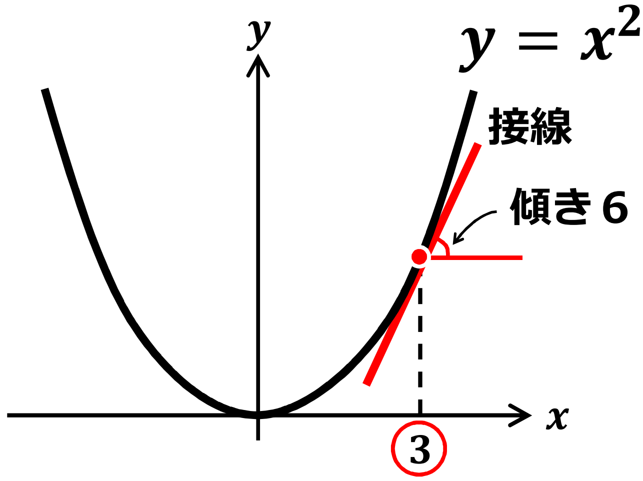
- $y = 5$




$$y = 5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \underset{\text{傾き}}{0}$$

- $y = x^2$





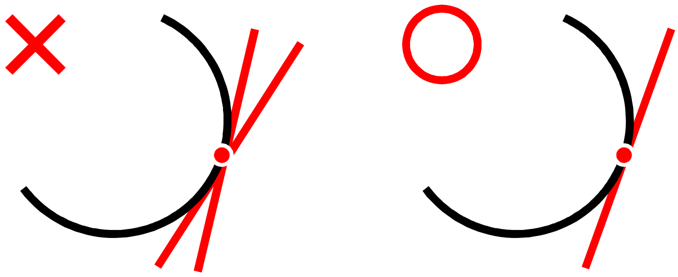

$$y = x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$= 2 \cdot 3$$

$$= \underbrace{6}_{\text{傾き}}$$

## 注意

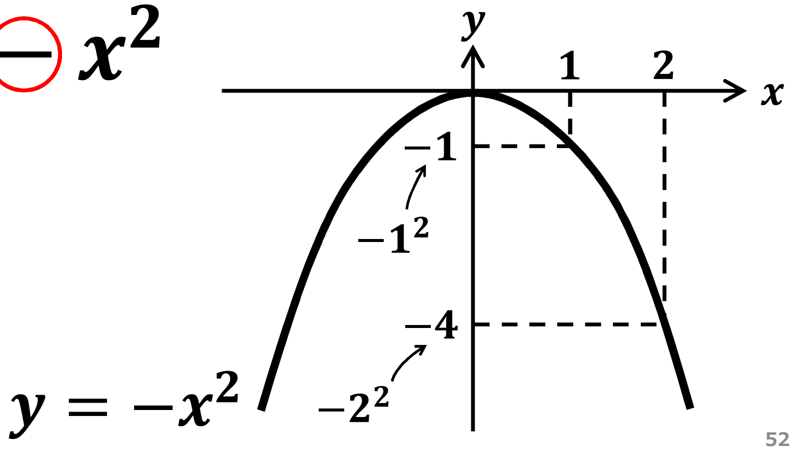
曲線上の一点で書ける
接線は一本だけ！



# ビブンの活用例①

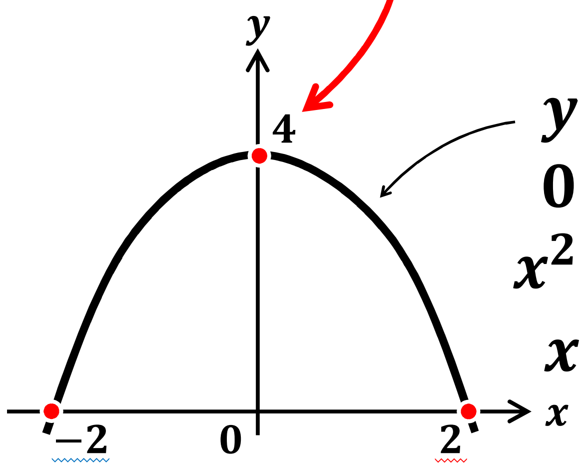
## 準備

- $y = - x^2$



- $y = -x^2 + 4$

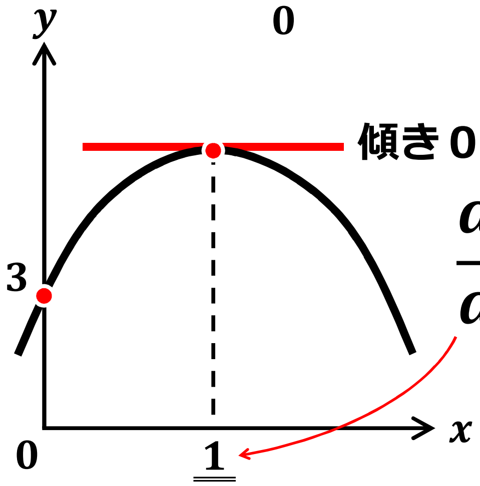
$4 \longleftarrow 0$




$$y = -x^2 + 4$$
$$0 = -x^2 + 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2, -2$$

## $y = -x^2 + 2x + 3$ の頂点は？

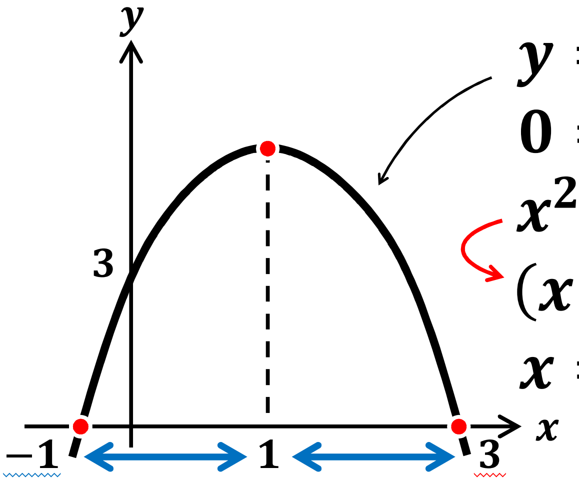
3　　0




$$\frac{dy}{dx} = -2x + 2 = 0$$

1　　傾き

# 補足　因数分解




$$y = -x^2 + 2x + 3$$
$$0 = -x^2 + 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x = 3, -1$$

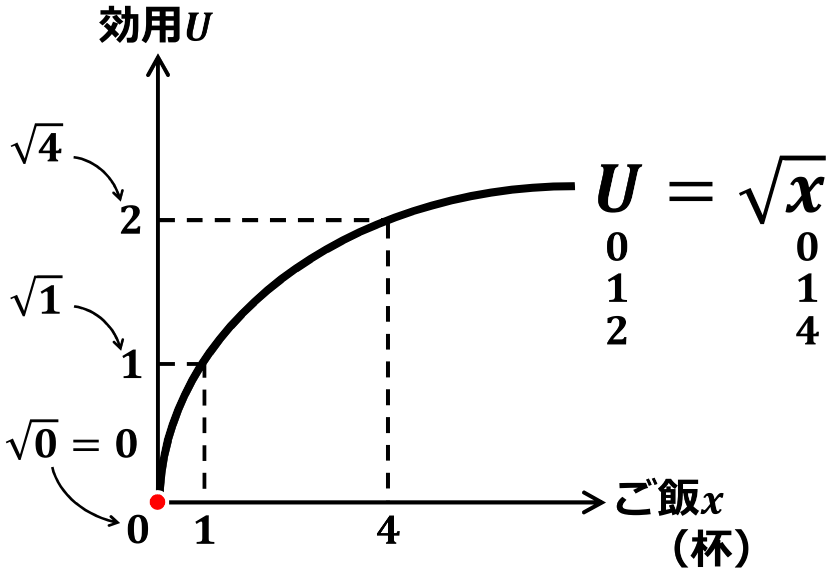
# ビブンの活用例②

$$U = \sqrt{x}$$

ただし、 Utility

$U$は効用(満足度)

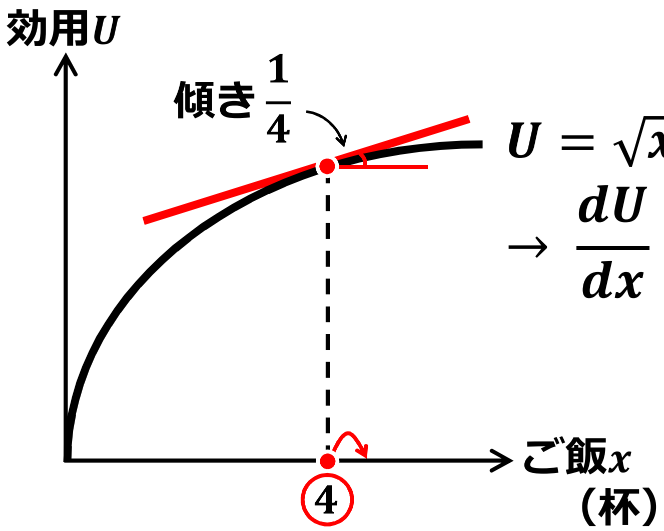
$x$はご飯の消費量


効用$U$
$\sqrt{4}$
2
$\sqrt{1}$
1
$\sqrt{0} = 0$
0
1
4
ご飯$x$
（杯）
$U = \sqrt{x}$
0 0
1 1
2 4

$$U = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

より、

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$




$$U=\sqrt{x}$$

$$\to \frac{dU}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$$

傾き

傾き$\frac{1}{4}$より、
５杯目のご飯をおかわりすると効用が$\frac{1}{4}$上がる

# 10. 偏微分

$$z = 2x^3 + y^2$$

$$\xrightarrow{x\text{で偏ビブン}} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 0$$

ラウンド(デルタ)
(ディー)

$$= 6x^2$$

⇒ $y$を定数としてビブン

$$z = 2x^3 + y^2$$

$$\xrightarrow{y\text{で偏ビブン}} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y$$

$$= 2y$$

$\Rightarrow$ $x$を定数としてビブン

- $z = x^3 y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{3-1} \cdot y^2 = 3x^2 y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 2y^{2-1} = 2x^3 y$$

- $z = 2xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$$

# 11. 関数

（やや難）

$$y = 2x + 1$$

↓ 次のように書いてもいい

$$\boxed{y = f(x)}$$

function 関数, 機能

⇒ $y$ は $x$ の関数

（$y$ の値は $x$ の値で決まる）

## 考え方 （やや難）

$$
\begin{tikzcd}
y = 2x + 1 \arrow[r] \arrow[d, "x = 2"] & y = f(x) \arrow[d, "x = 2"] \\
y = 2 \cdot 2 + 1 \arrow[r] & y = f(2)
\end{tikzcd}
$$

$$= 5$$

$y = 2x + 1$ （やや難）

ここで、

$f(x) = 2x + 1$

とおくと、

$x = 2$ のとき、

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

# イメージ

（やや難）

関数$f$に $x = 2$ を代入： $f(2)$

$$x \xrightarrow{\text{入力}} \boxed{f} \xrightarrow{\text{出力}} y$$

$2$ $\quad$ $5$

$f$という名前の機械

（やや難）

ちなみに、

$y = 2x + 1$　　　　：一次関数

$y = x^2 + 2x + 3$：二次関数

# 例　効用関数　　　（やや難）

$$U = \sqrt{x}$$

⇒ 効用$U$は消費量$x$の関数

この効用関数は、
次のように書いてもいい

① $U=\sqrt{x}$（元）　（やや難）

② $U=f(x)=\sqrt{x}$ ：△

③ $f(x)=\sqrt{x}$ ：△

④ $U(x)=\sqrt{x}$

⑤ $U=U(x)=\sqrt{x}$ ：△

⑥ $U=U(x)$ ← 投資関数を $I=I(r)$ と書くのと同じ

（やや難）

# イメージ

$$x \longrightarrow \boxed{U} \longrightarrow U$$

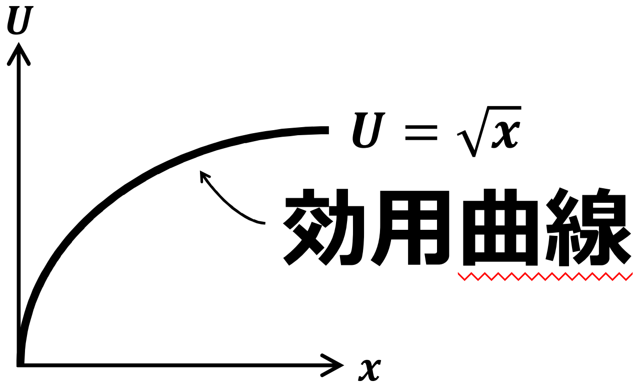
$4$

機械に$U$という名前をつけた

$\sqrt{4} = 2$

# ちなみに、（やや難）

$U=\sqrt{x}$ ：効用関数



# 12. 数列

（やや難）

**無限等比級数**

$$3, \; 6, \; 12, \; 24 \quad (\times 2 \; \times 2 \; \times 2)$$

：無限に続く等比数列の和

$$S = \underbrace{a}_{\text{初項}} + a \cdot \underbrace{r}_{\text{公比}} + a \cdot r^2 + \cdots$$

（やや難）

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots$$
$$= \boxed{\frac{a}{1-r}} \left( \begin{array}{l} \text{ただし、} \\ -1 < r < 1\text{のとき} \end{array} \right)$$

# 理由

（やや難）

$$S = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} \quad : ①$$

$$\underline{-)\ rS = \quad \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots}} \quad : ① \times r$$

$$S - rS = a$$

$$(1 - r)S = a$$

$$S = \underline{\underline{\frac{a}{1 - r}}}$$

## 例 （やや難）

$$\overset{a}{1} \overset{\times 0.8}{+} \overset{r}{0.8} \overset{\times 0.8}{+} 0.64 \overset{\times 0.8}{+} 0.512 + \cdots$$

$$= \frac{\overset{a}{1}}{1-\underset{r}{0.8}} = \frac{1}{0.2} \left( = \frac{1 \times 10}{0.2 \times 10} = \frac{10}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{5}}$$

## 数学力を高めるには…

**とにかく問題を解く！**