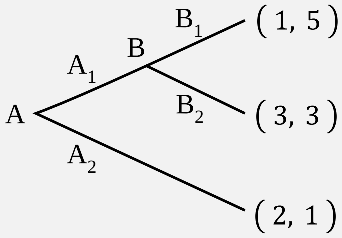
はじめよう経済学　－解答編－
第 15 講　ゲーム理論入門

　ミクロ経済学の一分野である「ゲーム理論」の理解を深めるために，練習問題をいくつか用意しました。動画授業では，最適反応，ナッシュ均衡，囚人のジレンマ，展開形ゲームなどを説明しましたが，この問題集ではこれらに加えて，支配戦略，瀬戸際戦略，コミットメント，チキンゲーム，空脅しなども紹介していきます。
　また，授業では展開形ゲームを扱った際に「ゲームの解」という言葉を使いましたが，実はこれは正しい言葉遣いではありません。展開形ゲームの解は「部分ゲーム完全均衡」といい，授業で示した答えはもう少し正確に記述する必要があるのです。（正確な解の記述は p.17）
　今回はページ数が少し多くなってしまいましたが，問題自体は 7 ページ分しかありませんので，問題を解くことを優先されると効率的な学習ができるかと思います。

＜第 15 講のノーテーション＞
特にありません。
［注意］次のような利得表とゲームの木において，各括弧内の左側がプレイヤーA の利得，右側がプレイヤーB の利得を表しているものとする。

	B_1	B_2
A_1	(1,2)	(5,3)
A_2	(3,1)	(2,4)



目次

＜補足一覧＞　　＊ 補足 12 以降は難易度が高いので飛ばしてもよい。

1．戦略形ゲーム

本節では，「すべてのプレイヤーが同時に行動する」という**戦略形ゲーム**（同時ゲーム；同時手番ゲーム；標準形ゲーム）について解説していく。

ところで，ゲーム理論における「ゲーム」という言葉を定義しておく。

ゲーム（**ゲーム的状況**）とは，

「自分の利益が相手の行動に依存し，相手の利益が自分の行動に依存している状況」

である。要は，自分が行動を変えたら，相手も行動を変えてくるし，相手が行動を変えれば，自分も行動を変えなければいけないといったような状況だ。（そう考えるとテレビゲームやスポーツもゲーム的状況ですね！）

（１）利得表

戦略形ゲームは，プレイヤー，戦略，利得（payoff ; ペイオフ）で表現することができる。

プレイヤー　意思決定をする主体

戦略　（戦略形ゲームでは）プレイヤーの行動

利得　ゲームの結果に対するプレイヤーの好みや利益

［注意］第 2 節の展開形ゲームでは「戦略」と「行動」は異なる。

これら，3 つの要素をすべて含んだものが次の**利得表**（利得行列）である。ちなみに，次の利得表は 2 人 2 戦略ゲーム（２×２ゲーム；two by two game）である。

	B_1	B_2
A_1	(1,2)	(2,3)
A_2	(3,4)	(4,1)

この利得表において，プレイヤーは A さんと B さん，A さんの戦略（行動）は A_1 と A_2，B さんの戦略（行動）は B_1 と B_2，そして，例えば A さんが戦略 A_1，B さんが戦略 B_1 を選んだときの A さんの利得は 1，B さんの利得は 2 であることが表されている。

（２）最適反応

最適反応（最適反応戦略；最適応答）とは，相手の戦略に対して，自分の利得を最大にする戦略のことである。例えば，先程の利得表において，

	B_1	B_2
A_1	($\boxed{1}$,2)	(2,3)
A_2	($\boxed{3}$,4)	(4,1)

B さんが戦略 B_1 を選ぶと仮定したとき，A さんが戦略 A_1 を選べば A さんの利得は 1，A さんが戦略 A_2 を選べば A さんの利得は 3 であるので，「A さんは利得の大きい戦略 A_2 を選ぶべき！」となる。これを「戦略 B_1 に対する A さんの最適反応は戦略 A_2 である」という。要は，B さんの戦略 B_1 に対する A さんの最適（な）反応は戦略 A_2 ですよ，というわけだ。

ところで，次のように比較する利得が同じ（$\boxed{1}$と$\boxed{1}$）である場合はどうだろうか。

	B_1	B_2
A_1	$(\boxed{1}, 2)$	$(2, 3)$
A_2	$(\boxed{1}, 4)$	$(4, 1)$

戦略 B_1 に対する A さんの最適反応は，戦略 A_1 なの？戦略 A_2 なの？と迷うかもしれないが，こういうときは最適反応の定義に戻るといい。

最適反応とは，相手の戦略に対して，自分の利得を最大にする戦略のことであった。この定義に従うと，利得 1 と利得 1 における利得の最大値は 1 である。つまり，戦略 B_1 に対して，戦略 A_1 も戦略 A_2 も最適反応なのである。（そのため，ナッシュ均衡を探すときは，両方の利得 1 に〇を書けばいいのである）

ちなみに，B さんの最適反応についても触れておこう。前ページの利得表において，

	B_1	B_2
A_1	$(1, \boxed{2})$	$(2, \boxed{3})$
A_2	$(3, 4)$	$(4, 1)$

A さんが戦略 A_1 を選ぶと仮定したとき，B さんが戦略 B_1 を選べば B さんの利得は 2，B さんが戦略 B_2 を選べば B さんの利得は 3 であるので，「B さんは利得の大きい戦略 B_2 を選ぶべき！」となる。これを「戦略 A_1 に対する B さんの最適反応は戦略 B_2 である」という。

また，戦略 A_2 に対する B さんの最適反応は戦略 B_1 である。

（３）支配戦略

授業では触れなかった支配戦略について解説をする。これも先程の利得表を例とする。

	B_1	B_2
A_1	$(\boxed{1}, 2)$	$(\underline{2}, 3)$
A_2	$(\boxed{3}, 4)$	$(\underline{4}, 1)$

最適反応の考え方から，戦略 B_1 に対して，A さんは戦略 A_2 を選ぶべきであった。同様に考えると，戦略 B_2 に対しては，A さんは戦略 A_2 を選ぶべきである（利得 2 と 4 を比べると，4 の方が大きいからである）。これより，A さんは B さんが戦略 B_1 を選ぼうが，戦略 B_2 を選ぼうが，A さんの最適反応は「戦略 A_2 を選ぶ」になることがわかるだろう。このとき，A さんの（強）**支配戦略**は戦略 A_2 である，という。（強）支配戦略とは，相手のどの戦略に対しても最適反応となる戦略のことなのである。（実はこれは支配戦略の正確な定義ではない。詳しくは＜補足１＞を参照）

A さんに支配戦略があることはわかったが, B さんには支配戦略があるだろうか？その答えは「ない」である。なぜなら，（２）で見たように，戦略 A_1 を対する最適反応は B_2 で，戦略 A_2 を対する最適反応は B_1 であるので，支配戦略はないのである。

これより，支配戦略はいつでも存在するわけではないことがわかるだろう。

ところで，次のような利得表の場合，A さんの戦略 A_2 は（強）支配戦略と言えるのだろうか。

	B_1	B_2
A_1	$(\boxed{1}, 2)$	$(\underline{2}, 3)$
A_2	$(\boxed{1}, 4)$	$(\underline{4}, 1)$

B さんが戦略 B_1 を選ぶと仮定したとき，A さんが戦略 A_1 を選べば A さんの利得は 1，A さんが戦略 A_2 を選べば A さんの利得は 1 となり，A さんにとって比較する利得が同じになる（B さんが戦略 B_2 を選ぶときは，A さんは戦略 A_2 を選んだ方が利得が高い）。このように，比較する利得が同じ値になることを含む場合，A さんの戦略 A_2 は**弱支配戦略**という。（詳しくは＜補足１＞を参照）

＜補足１＞ 支配する

前ページで，支配戦略とは，相手のどの戦略に対しても最適反応となる戦略のことであると書いたが，これはわかりやすい反面，（強）支配戦略の正確な定義ではない。

＊ 単に支配戦略と書けば，強支配戦略のことを意味する。

例えば，次の利得表において，

	B_1	B_2
A_1	$(\boxed{1}, 2)$	$(\underline{2}, 3)$
A_2	$(\boxed{3}, 4)$	$(\underline{4}, 1)$

B さんが戦略 B_1 であろうが戦略 B_2 であろうが，A さんにとって戦略 A_1 の利得よりも戦略 A_2 の利得の方が大きい。このとき，戦略 A_2 は戦略 A_1 を（強）**支配する**という。

要は，上の利得表の 2 つの太い四角内で，利得 $\boxed{1}$ と $\boxed{3}$ を比較し，利得 $\underline{2}$ と $\underline{4}$ を比較したときに，どちらも下（つまり，戦略 A_2 のとき）の利得の方が大きくなっているので，戦略 A_2 は戦略 A_1 を支配するというのである。この「支配する」という考え方を踏まえると，支配戦略の正確な定義は次の通りである。

（強）支配戦略とは，自分の他のすべての戦略を支配するような戦略のことである。

これに対して，次の利得表において，

	B_1	B_2
A_1	$(\boxed{1}, 2)$	$(\underline{2}, 3)$
A_2	$(\boxed{1}, 4)$	$(\underline{4}, 1)$

戦略 A_2 は戦略 A_1 を**弱支配する**という。要は，利得 $\boxed{1}$ と $\boxed{1}$ のように比較する利得が同じ値になる場合が含まれていれば，「弱」支配の考え方になるのである。また，**弱支配戦略**とは，自分の他のすべての戦略を弱支配するような戦略のことである。

前ページのように「（強）支配戦略とは，相手のどの戦略に対しても最適反応となる戦略のことである」と書いてしまうと，強支配戦略と弱支配戦略のどちらにもこの定義が当てはまってしまい，強支配戦略と弱支配戦略の区別ができなくなってしまうのである。

（４）ナッシュ均衡①

ナッシュ均衡とは，どのプレイヤーも最適反応をとっているときの戦略の組み合わせ（戦略の組）である。戦略の組（み合わせ）とは，例えば「A さんは戦略 A_1 を選び，B さんは戦略 B_2 を選ぶ」という状況のことである。この戦略の組を(A_1, B_2)と書くことにしよう。

さて，ナッシュ均衡の見つけ方を説明していく。次の利得表において，

	B_1	B_2
A_1	(1, 2)	(2, 3)
A_2	(3, 4)	(4, 1)

利得 3 に〇がついているのは，授業でも説明した通り，A さんの利得 1 と利得 3 を比較したときに，利得 3 の方が大きいので利得 3 に〇をつけたわけである。

ただ，利得 3 に〇がついているのは，

「戦略 B_1 に対する A さんの最適反応は戦略 A_2 である」

ということを表していると考えるといいだろう。そして，授業で説明した最適反応を探していくやり方（下図のように，矢印の先どうしを比較して（同じか）大きな値に〇をつける方法）

	B_1	B_2
A_1	(1, 2)	(2, 3)
A_2	(3, 4)	(4, 1)

で，〇をつけていくと，

	B_1	B_2
A_1	(1, 2)	(2, 3)
A_2	(3, 4)	(4, 1)

となり，〇が 2 つある箇所，つまり，2 人ともお互いに最適反応をし合っている戦略の組は「A さんは戦略 A_2 を選び，B さんは戦略 B_1 を選ぶ：(A_2, B_1)」であるので，ナッシュ均衡は (A_2, B_1) ということになるのである。

＜補足２＞ ジョン・ナッシュ

アメリカの数学者であるジョン・ナッシュ（1928－2015）は，1950 年に発表した 2 ページの論文でナッシュ均衡の考え方を発表した。ナッシュは 1959 年から統合失調症を患い，彼の激動の半生は映画『ビューティフル･マインド』(2002 年にアカデミー賞で 4 冠を達成）で描かれている。ナッシュには伝説的なエピソードが数多くあるが，有名な話として，ナッシュが大学院の博士課程に進学する際に指導教官から書いてもらった短い推薦書には，

“He is a mathematical genius.”　彼（ナッシュ）は数学の天才である。

と書かれていた。(推薦書の実物写真はネット上に出回っています）

次のように利得を比較する際に同じ値（1 と 1）がある場合はどうだろうか。

	B_1	B_2
A_1	(1 , 2)	(2 , 3)
A_2	(1 , 4)	(4 , 1)

p.3 の上部で説明したが，同じ値である利得 1 の両方に〇がつくことになる（戦略 A_1 と戦略 A_2 の両方が最適反応であるため）。よって，この利得表のナッシュ均衡は (A_2, B_1) である。

（５）囚人のジレンマ

次の利得表は，授業で説明したような囚人のジレンマに陥ってしまう例である。

	協力する B_1	協力しない B_2
協力する A_1	(2 , 2)	(0 , 3)
協力しない A_2	(3 , 0)	(1 , 1)

まず，ナッシュ均衡を求めるために，各自で利得に〇をつけていってほしい。（解答は次ページの一番上にある）

さて，ナッシュ均衡は「A さんも B さんも協力しない」という (A_2, B_2) になるが，これは囚人のジレンマに陥っている状況である。囚人のジレンマの特徴とは次の通り。

<u>囚人のジレンマの特徴</u>

① 2 人にとって「協力しない」は（強）支配戦略である。
② 「2 人とも協力しない」がナッシュ均衡である。
③ 「2 人とも協力しない」よりも「2 人とも協力する」の方が，2 人とも利得が高い。
④ 一方が「協力しない」と他方の利得は下がる。

ここで，2 点だけ補足をしておこう。

まず 1 点目。A さんにとって「協力しない A_2」は支配戦略であり，B さんにとっても「協力しない B_2」は支配戦略である。このことから，(A_2, B_2) は 2 人とも支配戦略であることから**支配戦略均衡**という。もちろん，支配戦略均衡は必ずナッシュ均衡になる。（ちなみに，ナッシュ均衡だからといって支配戦略均衡になるとは限らない。例えば，p.5 の利得表を見たときに，ナッシュ均衡は支配戦略均衡になっていないことがわかるだろう）

次に 2 点目。2 人の利得を同時に増やすことができない戦略の組を**パレート最適**という（実はこれはパレート最適の正確な定義ではない。詳しくは＜補足３＞を参照）。

例えば，(A_2, B_2) はパレート最適ではない。なぜなら，(A_2, B_2) から (A_1, B_1) に移ることで，A さんと B さんの 2 人の利得が同時に増える（$(1,1) \rightarrow (2,2)$）からである。ちなみに，(A_2, B_1) と (A_1, B_2) もパレート最適である。なぜなら，例えば，(A_2, B_1) での利得は $(3,0)$ であるが，他のどの戦略の組に移動しても（$(3,0) \rightarrow (2,2)$，$(3,0) \rightarrow (1,1)$，$(3,0) \rightarrow (0,3)$），2 人の利得を同時に増やすことはできないからである。（例えば，$(3,0) \rightarrow (2,2)$ であれば，B さんの利得は増えているが，A さんの利得は減ってしまっている）

（解答）

	協力する B_1	協力しない B_2
協力する A_1	(2, 2)	(0, 3)
協力しない A_2	(3, 0)	(1, 1)

ちなみに，囚人のジレンマは 1950 年にアメリカの数学者アルバート・タッカー（第 5 講＜補足１０＞でも登場するタッカー）が考案したストーリーであり，囚人のジレンマがきちんと定義されることは少ない。前ページの囚人のジレンマの特徴は次の本を参考にした。

＊ 神戸伸輔（2004）『入門 ゲーム理論と情報の経済学』日本評論社

＜補足３＞ パレート最適

p.6 でパレート最適とは，2 人の利得を同時に増やすことができない戦略の組のことであると説明したが，これもわかりやすい反面，パレート最適の正確な定義ではない。

例えば，次の利得表（先程の囚人のジレンマの利得表とは一部異なる）

	協力する B_1	協力しない B_2
協力する A_1	$\boxed{(2,2)}$	$\boxed{(0,3)}$
協力しない A_2	$\boxed{(3,0)}$	(1, 2)

があるとき，先に正しい結論を書いてしまうと，四角で利得を囲った箇所（つまり，(A_1,B_1)，(A_2,B_1)，(A_1,B_2)）はパレート最適であるが，(A_2,B_2) はパレート最適ではない。

しかし，パレート最適を「2 人の利得を同時に増やすことができない戦略の組のこと」と定義してしまうと，（p.6 の一番下の段落で説明した通り）(A_1,B_1)，(A_2,B_1)，(A_1,B_2) はパレート最適であり，さらに，(A_2,B_2) もパレート最適であるという結論になってしまう。以下で説明するように (A_2,B_2) はパレート最適ではない。

ある戦略の組が**パレート最適**であることのより正確な定義は，「誰かの利得を減らすことなしには，他の誰かの利得を増やすことができない戦略の組のこと」である。何とも遠回しな言い方で初めて聞いた人は混乱してくるかもしれない。ただ，この定義であれば，(A_1,B_1)，(A_2,B_1)，(A_1,B_2) はパレート最適で，(A_2,B_2) はパレート最適ではないと言える。

まず，(A_1,B_1) はパレート最適であるので，「誰かの利得を減らすことなしには，他の誰かの利得を増やすことができない」。例えば，A さんの利得を 2 から 3 に増やそうとする，つまり，(A_1,B_1) から (A_2,B_1) へ移動しようとすると，B さんの利得が 2 から 0 へ下がってしまう。言い換えると，「B さんの利得を減らすことなしには，A さんの利得を増やすことができない」状況である。いま，(A_1,B_1) から (A_2,B_1) への移動を考えたが，他のどこへ移動しようとしても「誰かの利得を減らすことなしには，他の誰かの利得を増やすことができない」状況になっているのである。(A_2,B_1)，(A_1,B_2) も同様の理由でパレート最適である。

それに対して (A_2,B_2) は，(A_1,B_1) へ移動しようとすると A さんの利得は 1 から 2 に増えるが，B さんの利得は 2 で同じままであり，減ることはない。つまり，(A_2,B_2) は「B さんの利得を減らさずに，A さんの利得を増やすことができる」のでパレート最適ではないのである。

＊ パレート：イタリアの経済学者ヴィルフレド・パレート（1848－1923）

（６）ナッシュ均衡②

ここで，ナッシュ均衡の主な特徴についてまとめておこう。

［ナッシュ均衡の特徴１］

ナッシュ均衡において，どのプレイヤーも自分だけで戦略を変えようとしない。

例えば，囚人のジレンマの利得表において，

	協力する B_1	協力しない B_2
協力する A_1	$(2,2)$	$(\boxed{0},3)$
協力しない A_2	$(3,\underline{0})$	$(\boxed{1},\underline{1})$

ナッシュ均衡は (A_2,B_2)，つまり，$(1,1)$ の箇所に相当した。いま，ナッシュ均衡の状況にあり，A さんは戦略 A_2，B さんは戦略 B_2 を選んでいるとき，A さんと B さんのどちらかが 1 人だけで，戦略を A_1，もしくは B_1 に変更することはない。

なぜなら，利得表内の実線の矢印から，A さんだけが戦略を A_2 から A_1 へ変更した場合に，A さんの利得が 1 から 0 に減ってしまうので，ナッシュ均衡の状況において A さんは戦略を A_2 から変更しないのである。

B さんも同様に，利得表内の点線の矢印から，B さんだけが戦略を B_2 から B_1 へ変更した場合に，B さんの利得が 1 から 0 に減ってしまうので，ナッシュ均衡の状況にある B さんは戦略を B_2 から変更しないのである。

これは，囚人のジレンマの利得表だけでなく，ナッシュ均衡では一般的にいえる特徴である。この特徴をナッシュ均衡の**自己拘束性**という。

［ナッシュ均衡の特徴２］

ナッシュ均衡は複数存在することや，存在しないこともある。

これは，次の利得表のナッシュ均衡を各自で求めてみればわかることだろう。

利得表（１）

	B_1	B_2
A_1	$(1,3)$	$(4,4)$
A_2	$(3,2)$	$(2,1)$

利得表（２）

	B_1	B_2
A_1	$(1,3)$	$(4,2)$
A_2	$(2,1)$	$(3,4)$

（解答）（１）$(A_2,B_1),(A_1,B_2)$　（２）なし

ちなみに，利得表（１）でパレート最適は (A_1,B_2) のみである。このことから，「パレート最適である」ナッシュ均衡，「パレート最適でない」ナッシュ均衡の両方が存在することがわかるだろう。また，利得表（２）ではパレート最適は (A_1,B_2) と (A_2,B_2) であるが，どちらもナッシュ均衡ではない。

ところで，利得表（２）で「ナッシュ均衡は存在しない」と結論付けたが，混合戦略まで考えると，すべての利得表に「ナッシュ均衡は必ず存在する」。（**＜補足１７＞**を参照）

【問題】

(1) 次の各利得表に対して，授業で説明した「利得に○をつけながらナッシュ均衡を探す方法」を用いて，利得表内の利得に○を書きなさい。

1.

	B_1	B_2
A_1	(1, 1)	(2, 2)
A_2	(3, 3)	(4, 4)

2.

	B_1	B_2
A_1	(1, 2)	(3, 4)
A_2	(8, 7)	(6, 5)

3.

	B_1	B_2
A_1	(1, 2)	(2, 1)
A_2	(2, 1)	(1, 2)

4.

	B_1	B_2
A_1	(2, 2)	(3, 1)
A_2	(1, 3)	(2, 2)

5.

	B_1	B_2
A_1	(2, 2)	(1, 3)
A_2	(3, 1)	(2, 2)

6.

	B_1	B_2
A_1	(1, 3)	(2, 3)
A_2	(1, 4)	(2, 4)

7.

	B_1	B_2
A_1	(1, 1)	(1, 1)
A_2	(1, 1)	(1, 1)

8.

	B_1	B_2
A_1	(2, 2)	(0, 3)
A_2	(3, 0)	(1, 1)

9.

	B_1	B_2
A_1	(1, 1)	(0, 3)
A_2	(3, 0)	(2, 2)

10.

	B_1	B_2
A_1	(1, 1)	(3, 0)
A_2	(0, 3)	(2, 2)

11.

	B_1	B_2
A_1	(0, 2)	(1, 1)
A_2	(1, 1)	(2, 0)

12.

	B_1	B_2
A_1	(0, 3)	(2, 2)
A_2	(1, 1)	(3, 0)

(2) 次の文章中の括弧内に入る適切な語句を書きなさい。また，適切な語句を選ぶ場合には，正しい語句に○を書きなさい。

1. 次の利得表において，戦略 B_1 に対するプレイヤーA の最適反応は戦略（○A_1 / A_2 ），戦略 A_2 に対するプレイヤーB の最適反応は戦略（○B_1 / B_2 ）である。

	B_1	B_2
A_1	(5, 2)	(6, 3)
A_2	(3, 4)	(7, 1)

2. （ ナッシュ均衡 ）とは，どのプレイヤーも最適反応をとっているときの戦略の組のことである。
3. 次の利得表において，プレイヤーA の支配戦略は戦略（○A_1 / A_2 ）であり，プレイヤーB の支配戦略は戦略（ B_1 /○B_2 ）であるので，支配戦略均衡はそれらの戦略の組である。

	B_1	B_2
A_1	(3, 2)	(4, 3)
A_2	(2, 1)	(1, 4)

4. ある利得表において，支配戦略は常に（ 存在し /○存在するとは限らず ），ナッシュ均衡は常に支配戦略均衡に（ なる /○なるとは限らない ）。

5. 次の利得表において，パレート最適となる戦略の組は（◯(A_1,B_1) / (A_1,B_2) / (A_2,B_1) / (A_2,B_2) ）である。

	B_1	B_2
A_1	(5, 5)	(2, 3)
A_2	(3, 1)	(1, 2)

6. 次の利得表において，(A_1,B_1) はパレート最適で（◯あり / はなく ），(A_2,B_2) はパレート最適で（◯ある / はない ）。

	B_1	B_2
A_1	(5, 5)	(2, 3)
A_2	(3, 1)	(10, 2)

7. 次の利得表において，(A_1,B_1) はパレート最適で（◯あり / はなく ），(A_2,B_2) はパレート最適で（ ある /◯はない ）。

	B_1	B_2
A_1	(5, 5)	(2, 3)
A_2	(3, 1)	(5, 2)

8. 次に利得表において，

	B_1	B_2
A_1	(2, 2)	(0, 3)
A_2	(3, 0)	(1, 1)

(A_1,B_1) はパレート最適で（◯あり / はなく ），
(A_1,B_2) はパレート最適で（◯あり / はなく ），
(A_2,B_1) はパレート最適で（◯あり / はなく ），
(A_2,B_2) はパレート最適で（ ある /◯はない ）。

9. 次に利得表において，

	B_1	B_2
A_1	(2, 2)	(0, 3)
A_2	(3, 0)	(1, 1)

① 戦略 A_2 と戦略 B_2 は（ 支配 ）戦略である。「強支配」でも OK
② (A_2,B_2) はナッシュ均衡である。
③ (A_1,B_1) は (A_2,B_2) と比べて，2 人とも利得が（◯高い / 低い ）。
④ プレイヤーA が戦略 A_2 を選ぶと，戦略 A_1 を選んだときと比べて，プレイヤーB の利得は必ず（ 高く /◯低く ）なる。
といった特徴がある状況を（ 囚人のジレンマ ）という。

10. 問題(1)において，囚人のジレンマとなる利得表の問題番号は，
（ 1. / 2. / 3. / 4. / 5. / 6. / 7. /◯8. / 9. /◯10. / 11. /◯12. ）
である。該当する問題番号すべてに◯をすること。

(3)　次の各利得表に対して，授業で説明した「利得に○をつけながらナッシュ均衡を探す方法」を用いて，利得表内の利得に○を書きなさい。

1.

	B_1	B_2	B_3
A_1	(1,3)	(3,2)	(2,1)
A_2	(2,5)	(1,4)	(4,2)

2.

	B_1	B_2	B_3
A_1	(3,1)	(2,2)	(2,2)
A_2	(1,2)	(4,2)	(2,3)

3.

	B_1	B_2
A_1	(1,4)	(5,2)
A_2	(3,3)	(3,3)
A_3	(5,2)	(1,4)

4.

	B_1	B_2
A_1	(2,1)	(1,2)
A_2	(2,2)	(1,2)
A_3	(1,2)	(2,1)

5.

	B_1	B_2
A_1	(3,1)	(2,3)
A_2	(3,2)	(1,4)
A_3	(3,1)	(2,4)

6.

	B_1	B_2	B_3
A_1	(1,1)	(2,0)	(0,2)
A_2	(0,2)	(1,1)	(2,0)
A_3	(2,0)	(0,2)	(1,1)

7.

	B_1	B_2	B_3
A_1	(5,1)	(2,1)	(1,2)
A_2	(3,2)	(2,5)	(4,4)
A_3	(4,2)	(3,3)	(4,1)

(4)　次の利得表を見て，文章中の括弧内に入る適切な式，もしくは不等号に○を書きなさい。

	B_1	B_2
A_1	(a,b)	(c,d)
A_2	(e,f)	(g,h)

1. 戦略 B_1 に対する最適反応が戦略 A_2 になるためには，
（○$a<e$　/　$a>e$　/　$f<h$　/　$f>h$　）を満たす必要がある。
2. 戦略 A_2 に対する最適反応が戦略 B_2 になるためには，
（　$c<g$　/　$c>g$　/○$f<h$　/　$f>h$　）を満たす必要がある。
3. 戦略 A_1 に対する最適反応が戦略 B_1 と B_2 になるためには，
（　$a<c$　/　$a=c$　/　$a>c$　/　$b<d$　/○$b=d$　/　$b>d$　）を満たす必要がある。
4. ナッシュ均衡が (A_1, B_1) になるためには，a（　<　/○>　）e，b（　<　/○>　）d を満たす必要がある。
5. ナッシュ均衡が (A_2, B_1) になるためには，a（○<　/　>　）e，f（　<　/○>　）h を満たす必要がある。
6. ナッシュ均衡が (A_1, B_2) と (A_2, B_1) の 2 つになるためには，a（○<　/　>　）e，c（　<　/○>　）g，b（○<　/　>　）d，f（　<　/○>　）h を満たす必要がある。
7. ナッシュ均衡が (A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_2, B_2) の 3 つになるためには，
a（　<　/　=　/○>　）e，c（　<　/○=　/　>　）g，
b（　<　/○=　/　>　）d，f（○<　/　=　/　>　）h を満たす必要がある。

(5) 牛丼屋 A と牛丼屋 B はライバル関係にあるとし，ライバル店からより多くの客を奪うためには，値下げをする他ないとしよう。もしライバル店が値下げをせず（価格維持），自店だけが値下げをしたとき，自店はより大きな利潤（利得）が得られ，ライバル店の利得は小さくなるとする。しかし，両店とも値下げをした場合には，両店とも客数は変わらず，両店とも売上の低下によって利得が小さくなるとする。

結果的に，牛丼屋 A，牛丼屋 B ともに「値下げ」を選び，価格競争に陥っているとする。このような状況を表した利得表を作成するために，以下の利得表内に利得の値を書き入れなさい。ただし，牛丼屋 A と牛丼屋 B の戦略はそれぞれ「価格維持」と「値下げ」の 2 つとし，両店とも「価格維持」を選択する場合の利得は両店とも 100 とする。他の利得の値は各自で好きに設定すること。

	価格維持 B_1	値下げ B_2
価格維持 A_1	(100 , 100)	(40 , 120)
値下げ A_2	(120 , 40)	(80 , 80)

（解説）ナッシュ均衡が (A_2, B_2) で，囚人のジレンマの特徴を満たす利得表になるように利得の値を自由に設定すればよい。（**＜補足７＞**を参照）

＜補足４＞ アクセスカウント

私のホームページ（https://introduction-to-economics.jp/）にはアクセスカウントの機能をつけており，「現在このサイトで勉強中の人数」を表示している。これは，私が支配戦略を意識してつけた機能である。

仮に（実際にもそうであってほしいが）私の HP にある動画授業や問題集などの内容がとても良いものだとして，この良さにみなさんは気付いたものだとしよう。そうしたときに，仮に「現在このサイトで勉強中の人数」が 1,000 人と表示されている場合，みなさんはどう感じるだろうか？「この HP で経済学を勉強している人は，こんなにも多いのか！自分も頑張ろう！」となるのではないだろうか。

それに対して，仮に「現在このサイトで勉強中の人数」が 1 人（←このサイトを見ているのは自分一人だけ）だとする。すでにこの HP の良さに気付いているみなさんはどう感じるだろうか？「こんなに良い HP なのに知っている人はまだ少ないのか…！よし！こっそり頑張ろう！」と思う（人も多い）のではないだろうか。

つまり，アクセスカウントをつけることで，「勉強中の人数」が何人であれ，この HP を使って勉強するモチベーションが上がる（「この HP で勉強する」ことが支配戦略になる）のではないかと思うのである。

「勉強中の人数」が何人であってもモチベーションが上がるのなら，そもそもアクセスカウントをつける必要はないのでは？と思う人もいるかもしれないが，それはそれでもっともな意見である。私は，勉強というのは周りにも勉強している人が少しでもいることで，自分も頑張ろうかな！となる一面があるように思っている。そのため，このアクセスカウントの機能により，今この瞬間にも同じ HP で勉強して頑張っている人がいるんだな！ということの「見える化」にもなっているのではないかと考えるのである。

＜補足５＞ 瀬戸際戦略

渡辺（2008）p.31 の例を用いて瀬戸際戦略について説明することとしよう。

＊ 渡辺隆裕（2008）『ゼミナール ゲーム理論入門』日本経済新聞出版社

「大国」と「小国」の 2 国があるとし，この間には大きな川が流れているとする。最近，この川の汚染が進んでいるため，「大国」と「小国」の 2 国で川をきれいにするための交渉を行うものとする。

交渉の内容は「川をきれいにするための費用」を 2 国間でどのように分担するかということである。交渉における戦略は，2 国とも「強硬」か「妥協」かのどちらかの態度をとることだとして，2 国の戦略の組み合わせによる結果は次のようにまとめられるとする。（大国の方が川を汚している割合が大きく，それが交渉にも反映されている）

大国	小国		結果	利得：$(\text{大国},\text{小国})$	概要
強硬	強硬	→	交渉決裂	$(1,2)$	川は汚れたまま
強硬	妥協	→	費用負担は等分	$(4,1)$	大国には最も良い
妥協	強硬	→	大国が全て負担	$(2,4)$	小国には最も良い
妥協	妥協	→	大国が 80%負担	$(3,3)$	両国とも利得高め

＊ 利得の値（の大小関係）がそれなりに納得のいくものであることを確認してほしい。

これより，利得表は次のように書くことができる。

大国＼小国	強硬 B_1	妥協 B_2
強硬 A_1	(1, 2)	(4, 1)
妥協 A_2	(2, 4)	(3, 3)

この利得表から，ナッシュ均衡が (A_2, B_1) となり，大国が妥協し A_2，小国が強硬 B_1 な態度をとるという結果になることがわかる。

この例で重要なことは，小国にとって戦略「強硬 B_1」が支配戦略になっていることである。つまり，大国が「強硬 A_1」であろうが「妥協 A_2」であろうが，小国は「強硬 B_1」を選択するのである。そうすることによって，大国は戦略「妥協 A_2」を選ばざるを得ないということになるのである。この例における小国の戦略「強硬 B_1」を俗に**瀬戸際戦略**という。このように，弱い立場にあるものが強い立場のものに対して強い交渉力を持つ理由について，ゲーム理論の知識を用いることで，より説得的な説明ができることがわかるだろう。

<補足６> 利得の考え方（１）

次の利得表は，動画授業で説明した利得表とまったく同じ利得表である。

	黙秘 B_1	裏切る B_2
黙秘 A_1	$(-2,-2)$	$(-10,-1)$
裏切る A_2	$(-1,-10)$	$(-5,-5)$

私の経験上，ゲーム理論を初めて勉強する学生に，利得表の読み方を教えた上で，

「みなさんが囚人 A さんならば，黙秘 A_1 を選びますか？裏切る A_2 を選びますか？」

と質問すると，半数くらいの学生が黙秘 A_1 を選ぶ。そこで，

「どうして，黙秘 A_1 を選んだのですか？」

と聞くと，「出所した後，囚人 B さんからの仕返しが怖いです」や「相手を裏切るのは良くないと思います」といった回答をする学生が多い。

ただ，このような回答になるのもしょうがないと私は思う。この囚人のジレンマの例では，利得が「懲役」だけを表しているので，確かにこの利得表を見ただけでは「今後の B さんからの仕返し」があり得るのである。（だから，私は「出所後に B さんからの仕返しはないことにしましょう」などと条件をつけて学生に考えさせるのである）

ゲーム理論における利得の数値は，本来，「囚人 B さんの仕返しが怖さ」や「相手を裏切ることの後ろめたさ」なども加味された上で設定されていると考えるべきである。このように，あらゆることも加味された上で利得の数値が設定されているとするならば，最適反応を考えて裏切る A_2 を選ぶことの合理性にも納得がいくのではないだろうか。

<補足７> 利得の考え方（２）

ゲーム理論に関してよく聞く質問に

「利得の数値ってどうやって決まるのですか？」

がある。これに対して私はいつも

「利得の数値は仮定ですよ」

と答える。この回答に尽きると私は思っている。そもそも，ナッシュ均衡を探す場合，利得の「数値自体」よりも「数値の大小関係」が重要なのである。例えば，次の 3 つの利得表のナッシュ均衡はすべて (A_2, B_1) である。

利得表（１）

	B_1	B_2
A_1	$(1,2)$	$(2,3)$
A_2	$(3,4)$	$(4,1)$

利得表（２）

	B_1	B_2
A_1	$(2,4)$	$(4,6)$
A_2	$(6,8)$	$(8,2)$

利得表（３）

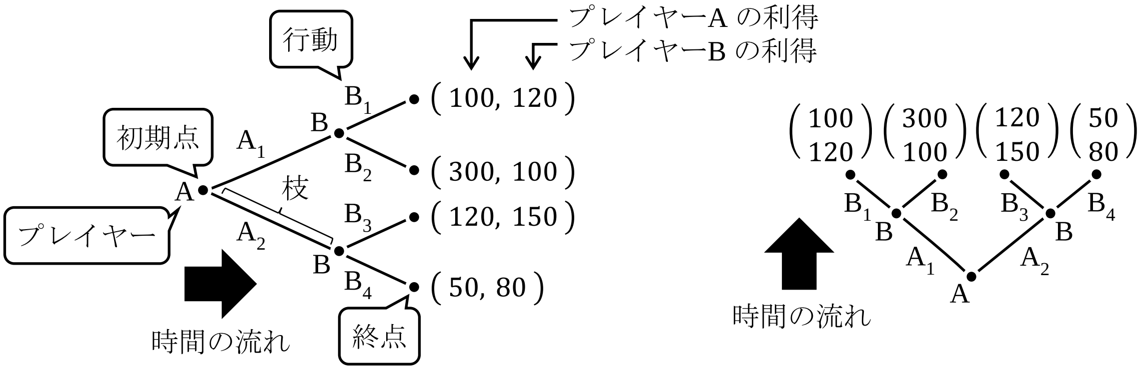
	B_1	B_2
A_1	$(1,2)$	$(2,100)$
A_2	$(3,4)$	$(4,1)$

これらの利得表を見てもわかるように，比較する利得どうしの大小関係が変わらなければナッシュ均衡は変わらないのである。そのため，利得の数値自体の厳密性にこだわる必要はあまりない。（これは第 5 講**<補足４>**で説明した「効用の序数性」と同じ考え方である。また，混合戦略（第 15 講**<補足１７>**）まで考えると利得の値がナッシュ均衡に影響する）

2. 展開形ゲーム

本節では，「プレイヤーが順番に行動する」という**展開形ゲーム**（逐次手番ゲーム）について解説していく。

（1）ゲームの木（樹）



よく表現されるゲームの木の書き方を 2 通り書いた。動画授業では，ゲームの木を左上図のように書いたが，教科書によっては右上図のように書く場合もある。（右上図のように書けば，まさに「木」のように見える）

ゲームの木は「点」と，点と点をつなぐ「枝」からできている。左上図から分かるように，「点」にも種類があり，この図では**終点**は 4 つある（ちなみに，この 4 つ以外の 3 つの点を**意思決定点**（もしくは，**手番**）という）。A さんが最初に行動する点が**初期点**である。ただ，この授業では，すべての点は書かずに省略することにしておこう。

＜補足８＞ 展開形ゲームの定義は？

展開形ゲームを上で「プレイヤーが順番に行動する」ゲームと書いたが，ゲーム内のあるタイミングで，プレイヤーが同時に行動するということが起きても，それは展開形ゲームという（例えば，3 人でジャンケンするときに，A さんは先に手を出し，B さんと C さんは同時に手を出すとすれば，このジャンケンは展開形ゲームである）。そのため，戦略形ゲーム以外の状況を含むゲームが展開形ゲームなのである。（このように考えると，戦略形ゲームも広い意味では展開形ゲームなのである。この点については，＜補足１２＞でも説明する）

また，「順番に行動する」という言葉の意味も，より正確には「各プレイヤーは，自分より前に行動したプレイヤーの行動を観察できる」ということを意味する。例えば，通常，後出しジャンケンは展開形ゲームで，通常のじゃんけんは戦略形ゲームだと考える。しかし，後出しジャンケンであっても，最初に出した人の手を，後に出す人が知らなれば，通常のじゃんけんと同じなのである。つまり，各プレイヤーは，自分より前に行動したプレイヤーの行動を観察できてこそ，展開形ゲームになるのである。

では結局，展開形ゲームの定義はどう書けばいいのか？慎重なゲーム理論の入門書ではゲームの木で表現されるゲームを展開形ゲームと呼ぶにとどめているのである。

＊ さらに厳密な定義は，岡田章（2013）『ゲーム理論 新版』有斐閣 を参照すること。

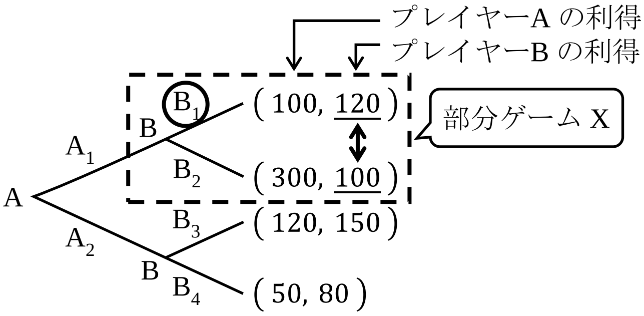
また，ゲームの木には，**プレイヤー**（A さん，B さん）と**行動**（A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4）も書かれる。ここで「あれ？？」と思って欲しい。A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4 のそれぞれは戦略とは呼ばずに，行動と呼ぶのである。詳しくは（３）で説明するが，展開形ゲームでは，「戦略」も存在するが，行動と戦略は異なるので，気を付けなければいけない。（さらに，行動戦略という用語もある。＜補足１５＞を参照）

（２）バックワードインダクション（後ろ向き帰納法；先読み）

展開形ゲームにおけるプレイヤーの合理的な行動とは，ゲームの終点に最も近い意思決定点から順番にプレイヤーの最適な行動を選んでいくことである。これを**バックワードインダクション**という。（将棋という展開形ゲームを考えた場合，できるだけ遠い先の手から正確にバックワードインダクション（先読み）できる棋士が強いということにも納得がいく）

バックワードインダクションは，具体的には次の手順で考えていけばよい。

Step1　次の部分ゲーム X において，B さんが行動を決定する



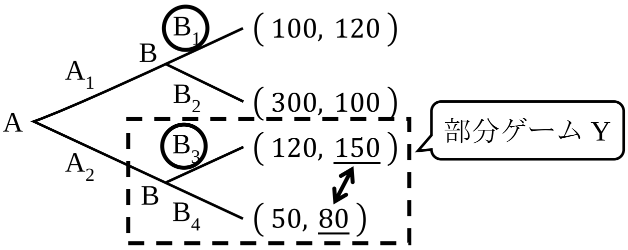
上の点線で囲まれた箇所を**部分ゲーム**という。全体のゲームの木の一部分ということから「部分」ゲームと名付けられている。この部分ゲームを X としておく。

部分ゲーム X では，B さんが行動を決める状況を意味している。B さんは利得が大きくなるように行動を決めたいので，B さんは自身の利得である 120 と 100 の利得を比べて，120 の方が大きいので，行動 B_1 を選択する（だから，B_1 に○をつけている）。

ここで注意して欲しいことがある。そもそも部分ゲーム X は，A さんが行動 A_1 を選択した場合に実現する。そのため，「A さんが行動 A_1 を選択した場合，B さんは行動 B_1 を選択する」と考えておこう。

Step2　次の部分ゲーム Y において，B さんが行動を決定する

＊ Step1 と Step2 の順序は入れ替わってもよい。

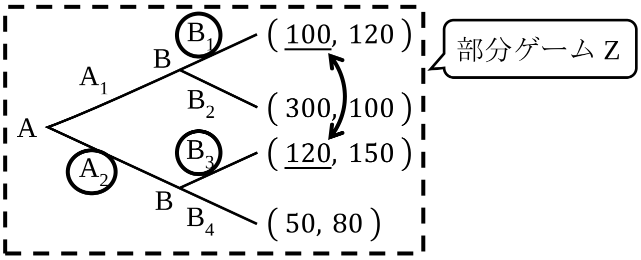


Step2 も Step1 と同様に考えると，部分ゲーム Y において，B さんは自身の利得である 150 と 80 の利得を比べて，150 の方が大きいので，行動 B_3 を選択する（B_3 に〇をつける）。

また，部分ゲーム Y は A さんが行動 A_2 を選択した場合に実現する。そのため，「A さんが行動 A_2 を選択した場合，B さんは行動 B_3 を選択する」となる。

Step3　次の部分ゲーム Z において，A さんが行動を決定する



上図では，全体のゲームの木が点線で囲まれているが，このように全体も部分ゲームの 1 つとしてカウントする。この部分ゲーム（ゲームの木全体）を Z としておく。

部分ゲーム Z では，まず A さんが行動を決める。Step1 と Step2 を踏まえると，A さんが行動 A_1 を選択すると，B さんは行動 B_1 を選択するので，A さんの利得は 100 になる。また，A さんが行動 A_2 を選択すると，B さんは行動 B_3 を選択するので，A さんの利得は 120 になる。A さんは利得が大きくなるように行動を決めたいので，A さんは 100 と 120 の利得を比べて，120 の方が大きいので，行動 A_2 を選択する（だから，A_1 に〇をつけている）。

Step1－Step3 より，終点まで行きつく経路は，まず A さんが行動 A_2 を選択し，その後で B さんが行動 B_3 を選択することである。したがって，ゲームの解は「A さんは A_2 を選び，B さんは B_3 を選ぶ」となる。

このような手順で，動画授業でも説明してきたわけであるが，この展開形ゲームの解は，本当はもう少し正確に記述しなれければいけない。それが次の（３）の内容である。

（３）部分ゲーム完全均衡

ゲームの解を

「A さんは A_2 を選び，B さんは B_3 を選ぶ」

書いた。（渡辺先生の『ゼミナール　ゲーム理論入門』では，これを「ゲームの結果」と呼ぶ）

しかし，より正確な解（**部分ゲーム完全均衡**）は

「A さんは A_2 を選び，
B さんは A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」

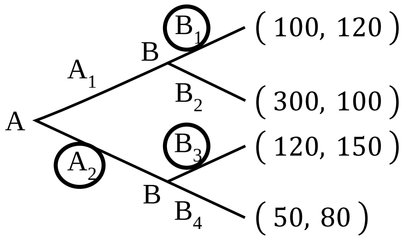
となる。

＊ 部分ゲーム完全均衡の定義は＜補足１５＞を参照

ここで, 次の図 (再掲) を踏まて, 部分ゲーム完全均衡をもう一度よく読み直してみよう。

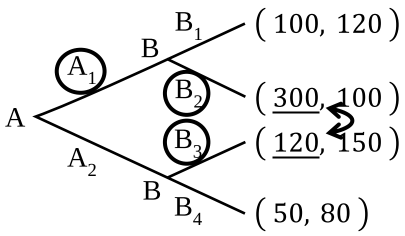
「A さんは A_2 を選び,

B さんは A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」



読み直したみなさんは，「波線の部分（A さんが A_1 を選べば B_1 を選び）は必要ないのではないか？だって，そもそも A さんは A_1 を選ばないのだから…」と思うかもしれない。

しかし，波線の部分は必ず解に含める必要がある！なぜなら，A さんが A_2 を選んだ理由は，B さんは「A さんが A_1 を選べば B_1 を選ぶ」と行動するからなのだ。もし，B さんが「A さんが A_1 を選べば B_2 を選ぶ」とした場合，次の図のように，A さんは利得 300 と 120 を比べて，300 の方が大きいので A_1 を選ぶことになってしまうのである。（ここはややこしい内容だと思いますのでゆっくり読んで理解してください）



これで，部分ゲーム完全均衡には,

「A さんは A_2 を選び,

B さんは A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」

の波線部を必ず含める必要があることがわかったのではないだろうか。

さて，ここまできてようやく展開形ゲームにおける行動と戦略の違いを説明することができる。本節の最初にも説明した通り，A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4 のそれぞれが行動である。それに対して，戦略は次の通りである。

A さんの戦略は次の 2 つである。（A さんについては，行動＝戦略である）

・ A_1 を選ぶ（行動 A_1） ：戦略 α_1
・ A_2 を選ぶ（行動 A_2） ：戦略 α_2

B さんの戦略は次の 4 つである。（B さんについては，行動≠戦略である）

・ A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ ：戦略 β_1
・ A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ ：戦略 β_2
・ A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ ：戦略 β_3
・ A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ ：戦略 β_4

このように戦略に $\alpha_1 \sim \beta_4$ と名前をつけていくと，部分ゲーム完全均衡

「A さんは A_2 を選び，

B さんは A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」

は，次のように言い換えることができる。

「部分ゲーム完全均衡は，戦略の組 (α_2, β_1) である」

＜補足９＞ コミットメント

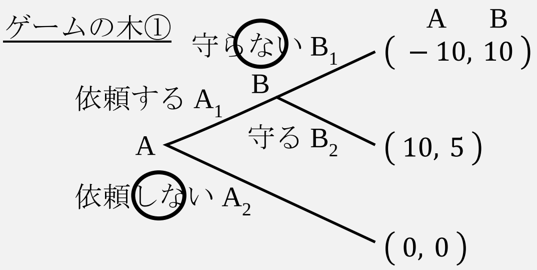
コミットメント（やコミットする）という言葉は，ビジネスにおいても使われるが，ビジネスにおいては「責任を持って関わる」といった意味である。（ちなみに，英単語の意味としては，commitment：誓約，確約）

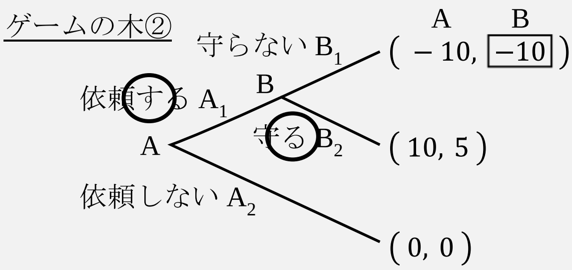
では，ゲーム理論における**コミットメント**はどのような定義かというと，ゲームが始まる前にプレイヤーがとるべき行動を公表し，さらに将来，確実にその行動を実行するという意思表明のことである。ゲーム理論では（現実でもそうであるが），コミットメントを上手く使うことで自分にとって良い状況を導くことができることを以下で示しておこう。

渡辺（2008）p.67 の例を用いてコミットメントについて説明する。

＊ 渡辺隆裕（2008）『ゼミナール ゲーム理論入門』日本経済新聞出版社

A さんは B さんに仕事を依頼するかどうかを考えているとしよう。しかし，B さんはあまり信頼できない人で，その仕事の納期を守らない可能性も十分あることを A さんは知っている。B さんにとって，A さんから仕事を依頼されて，納期を守らないことが最も利得が高く，A さんにとって，B さんに仕事を依頼して，納期を守られないことが最も利得が低くなるとしよう。それらの状況を表したものがゲームの木①である。





＊ B さんの行動「守らない B_1」は，「納期を守らない」の意味である。

ゲームの木①について，バックワードインダクションを用いると，「A さんは戦略「依頼しない A_2」を選び，B さんは戦略「A さんが依頼する A_1 なら納期を守らない B_1」を選ぶ」が部分ゲーム完全均衡になる。要するに，「A さんは B さんに仕事を依頼しない」というのがこのゲームの結果になるのである。

しかし，B さんはこのゲームの結果に満足しない。なぜなら，B さんにとって A さんから仕事を依頼されないことは利得が 0 と低くなるからである。B さんとしては，何としてでも A さんから仕事を依頼されたい。どうしたらいいのか？そこで使うのがコミットメントである。B さんが例えば，次のようにコミットメントするとしよう。

「A さん！仕事を依頼してくれたら，納期を守ります！

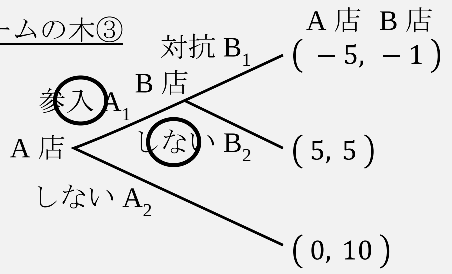
もし，納期を守らなければ，罰金を支払います！」

もし B さんが仕事の納期を守らなければ，B さんの利得は -10 になるとしよう。この状況を表したものが，前ページのゲームの木②である。ゲームの木②について，バックワードインダクションを用いると，「A さんは戦略「依頼する A_1」を選び，B さんは戦略「A さんが依頼する A_1 なら納期を守る B_2」を選ぶ」が部分ゲーム完全均衡になる。要するに，「A さんは B さんに仕事を依頼し，B さんは納期を守る」という，B さんの希望通りになったのである。

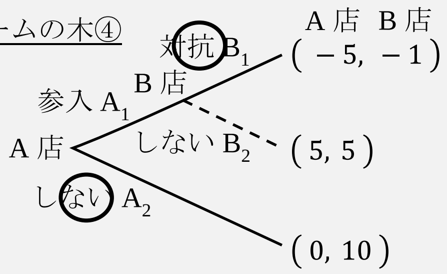
このように，B さんはコミットメントを上手く使うことで自分（B さん）にとって良い状況に導くことができたのである。

もう一つコミットメントの例を見ておこう。動画授業でも解説した「参入阻止」の例である。ゲームの木③は授業で説明した利得表と同じである。

ゲームの木③



ゲームの木④



ゲームの木③の部分ゲーム完全均衡は，「A 店は戦略「参入する A_1」を選び，B 店は戦略「A 店が参入する A_1 なら対抗しない B_2」を選ぶ」である。

ここで，授業を見ていて「あれ？」と思った人はいないだろうか。タイトルが「参入阻止」であるのに，B 店は A 店の参入を阻止できていないのだ。実はこの話には続きがあって，それをここで説明しよう。

B 店は A 店の参入を何としてでも阻止したいと考えているとしよう（A 店が参入しなければ B 店の利得は高くなるため）。そこで，B 店は次のようなコミットメントを使うとする。

「A 店が参入したら，絶対に対抗する！利得が減ろうが関係ない！」（背水の陣）

このコミットメントを踏まえたものがゲームの木④である（B 店は対抗しない B_2 を選ばないため，その枝を点線で書いている）。このゲームの木④の部分ゲーム完全均衡は，バックワードインダクションを用いると（そもそも A 店の二択しかないので，バックワードインダクションと言うのも変に感じるが），「A 店は戦略「参入しない A_2」を選び，B 店は戦略「A 店が参入する A_1 なら対抗する B_1」を選ぶ」となる。要するに，B 店がコミットメントを使ったことで「A 店は参入しない」という B 店の希望通りになったのである。

このようにコミットメントを上手く使って，ゲームの利得を変えたり，行動の種類を変えたりすることで，自分により有利な状況を作り出すことができるのである。

＜補足１０＞ チキンゲーム

岡田（2014）p.48 の例を用いてチキンゲームを説明しよう。

＊ 岡田章（2014）『ゲーム理論・入門 新版－人間社会の理解のために』有斐閣

ある相手との交渉を考える。交渉をするときの戦略は「ハト戦略」と「タカ戦略」の 2 種類であるとする。ハト戦略は，相手との対立を避ける平和的な戦略である。それに対して，タカ戦略は，自身の利益を大きくするために交渉の決裂のリスクがあっても好戦的な態度をとる戦略である。両者がそれぞれの戦略をとる場合の概要と利得表は次のようである。

	概要
両者ともハト戦略	両者とも利得が高い
ハト戦略とタカ戦略	タカの利得が高い
両者ともタカ戦略	両者とも利得が低い

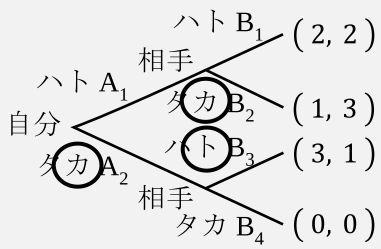
自分＼相手	ハト B_1	タカ B_2
ハト A_1	(2, 2)	(1, 3)
タカ A_2	(3, 1)	(0, 0)

ナッシュ均衡は，$(\text{タカ } A_2, \text{ハト } B_1)$ と $(\text{ハト } A_1, \text{タカ } B_2)$ の 2 つである（＜補足１７＞のように混合戦略まで考えると，ナッシュ均衡は 3 つある）。ナッシュ均衡を求めることができたが，結局，どちらのナッシュ均衡が実現するのだろうか。

ちなみに，タカ戦略を「強気な」戦略であり，ハト戦略を「弱気な」戦略と考えると，ハト戦略をとるプレイヤーを「弱虫」（チキン）と見ることもできることから，このゲームは**チキンゲーム**（タカーハト・ゲーム）という。このように，両者が自身にとって有利な戦略（ここではタカ戦略）を選ぶと両者にとって不利になってしまうゲームがチキンゲームなのである。

さて，このようなチキンゲームにおいて，どちらのナッシュ均衡が実現するのか？についてであるが，もちろん，上記の利得表だけではわからない。しかし，＜補足９＞で学んだコミットメントを用いれば自身にとって有利なナッシュ均衡を実現することができるのだ。

例えば，自分が先に行動するとコミットメントしたとしよう。そうすると，戦略形ゲームは次のような展開形ゲームに書き換えることができる。

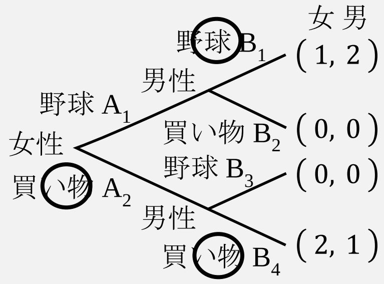


部分ゲーム完全均衡は，「自分は戦略「タカ A_2」を選び，相手は戦略「自分がハト A_1 を選べばタカ B_2，自分がタカ A_2 を選べばハト B_3」を選ぶ」である。要するに，自分は最初にタカ A_2 を選び，その後に相手がハト B_3 を選ぶということである。このとき，自分の利得は 3 で最も高くなり，チキンゲームにおいてコミットメントを上手く使うことで有利なゲームに変えることができたのである。（ただし，今回の例のようにコミットメントを用いて先手になることで，いつも有利になるわけではない。例えば，じゃんけんで先手になると負けてしまうことは容易に想像できることだろう）

では，もう 1 つ似た例を紹介しよう。動画授業でも解説した「男女の争い」の例である。この例もナッシュ均衡は 2 つ（混合戦略まで考慮すると 3 つ）あったが，結局，どちらのナッシュ均衡が実現するの？と疑問に思わなかっただろうか。もちろん，左下図の利得表だけからでは，野球デートと買い物デートのどちらのデートが成立するのかはわからない。

では，男女のどちらかがコミットメントをしたとして，女性が先手になる場合（レディーファースト）を考えてみる（右下図）。このゲームの木から部分ゲーム完全均衡を求めると，買い物デートが実現することがわかるのである。

男性＼女性	野球 B_1	買い物 B_2
野球 A_1	(2,1)	(0,0)
買い物 A_2	(0,0)	(1,2)



＊ ゲームの木の利得は，男女が反対になっていることに注意。

＜補足１１＞ フォン・ノイマン

ゲーム理論の創始者は，ハンガリー出身でアメリカの数学者であるフォン・ノイマン（1903－1957）と，ドイツ出身でアメリカで活躍した経済学者であるオスカー・モルゲンシュテルン（1902－1977）である。2 人が 1944 年に出版した『ゲームの理論と経済行動』という著書がゲーム理論の出発点となっている。

ところで，フォン・ノイマンは，アインシュタイン（1879－1955）も認めるほどの天才であった。フォン・ノイマンには数々の伝説が残っている（あくまで伝説であるので信憑性はご自身で確認されたい）。例えば，幼少期には，電話帳を開き，開いたページの電話番号を瞬時に暗記し，総和を求めて遊んだ。8 歳で微分積分を理解し，11 歳で大学数学の問題を鮮やかに解いた。ノイマン型コンピュータと言われる現在のコンピュータの基礎を作り，その計算速度よりも自身は速く暗算し，「世界で 2 番目に計算が上手な奴が生まれた」と言った。

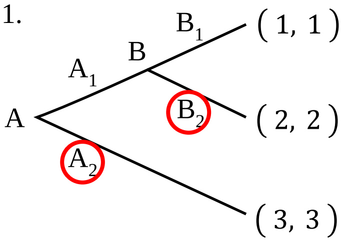
また，ジョン・ナッシュとの次のやり取りも有名である。ナッシュが大学院生であった頃，ノイマンの研究室を訪ね，自らが発見したナッシュ均衡についてノイマンに説明した。ノイマンはナッシュの説明をさえぎり，「くだらない。そんなのは不動点定理の問題にすぎない」と一蹴したそうである。（不動点定理とは，経済学において均衡点が存在するかどうかを証明するときによく用いられる数学の手法である）

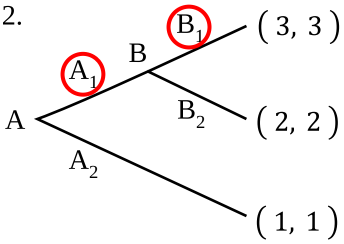
そんな天才ノイマンであったが，1957 年に 53 歳の若さで亡くなってしまう。ノイマンは，1943 年には原子爆弾開発・製造のための「マンハッタン計画」に参加することとなり，原爆の開発を支えることとなる。そして，1946 年のビキニ環礁における核実験に立ち会い，その際に多量の放射線を浴びたことが原因で癌を発症し，それが死因となったと言われている。また，これも伝説である（ので信憑性に乏しい）が，ノイマンの死の直前には脳腫瘍が悪化し，3＋4 という一桁の計算ですらできなくなっていたそうである。

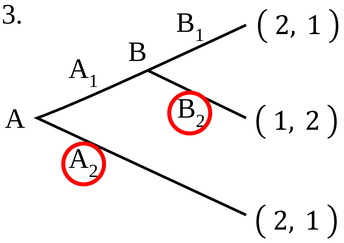
【問題】

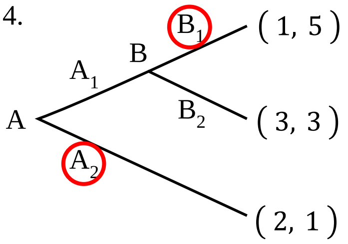
(1) 次のゲームの木に対して，授業で説明した「各プレイヤーの行動に〇をつけながらゲームの解を探す方法」を用いて，ゲームの木に書かれている行動に〇を書きなさい。ただし，括弧内の左側を A さんの利得，右側を B さんの利得とする。また，各プレイヤーが同時に行動することはないものとする。

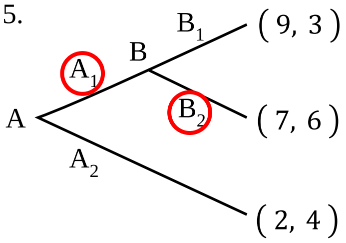
（注意）利得に〇を書くのではない。

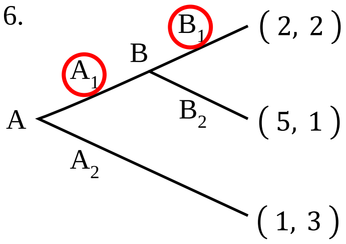
1.


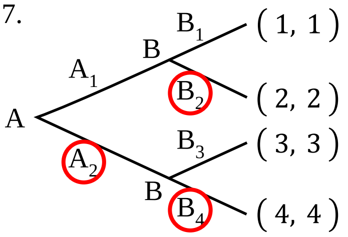
2.


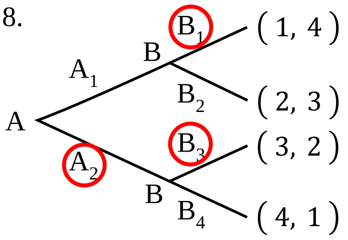
3.


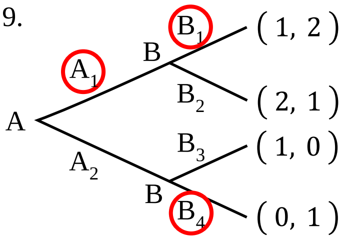
4.


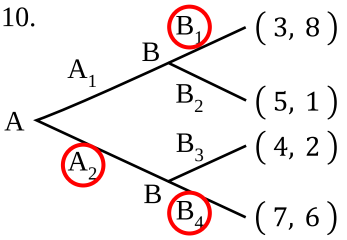
5.


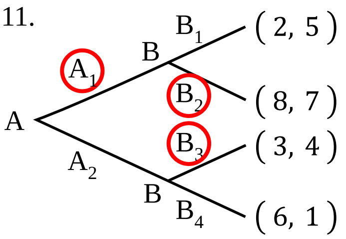
6.


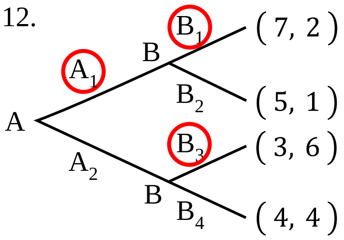
7.


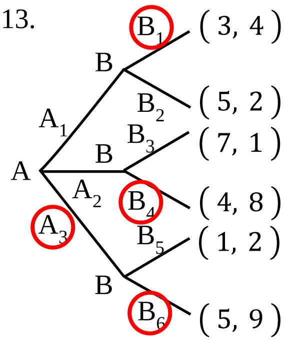
8.


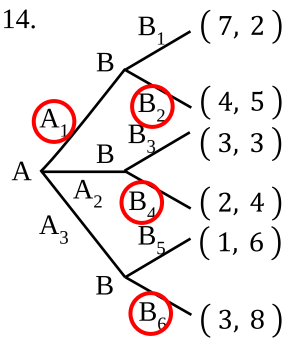
9.


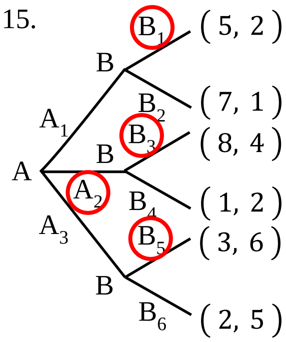
10.


11.


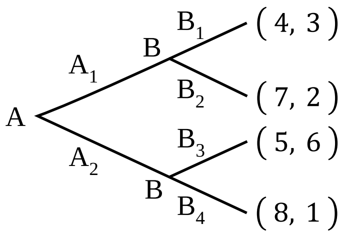
12.


13.


14.


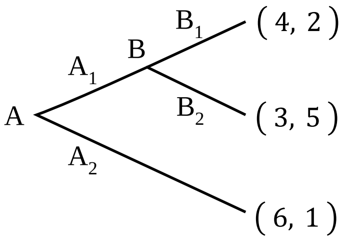
15.


(2)　次のゲームの木に関する文章について，括弧内に入る適切な数値を書きなさい。また，適切な語句を選ぶ場合には，正しい語句に〇を書きなさい。



1. プレイヤーA とプレイヤーB の A_1，A_2，B_1，B_2，B_3，B_4 を（　戦略　/〇行動　）という。
2. プレイヤーA が A_1 を選び，プレイヤーB が B_2 を選んだとき，プレイヤーB の利得は（　2　）となる。
3. プレイヤーB の「プレイヤーA が A_1 を選んだとき B_1 を選び，プレイヤーA が A_2 を選んだとき B_3 を選ぶ」といったことをプレイヤーB の（〇戦略　/　行動　）という。
4. プレイヤーA が「A_2 を選び」，プレイヤーB が「プレイヤーA が A_1 を選んだとき B_2 を選び，プレイヤーA が A_2 を選んだとき B_4 を選ぶ」とき，プレイヤーA の利得は（　8　）となる。
5. プレイヤーA の戦略は（　2　）つ存在する。また，プレイヤーB の戦略は（　4　）つ存在する。　戦略の数は p.18 の下部を参照
6. このゲームの部分ゲーム完全均衡は，プレイヤーA が「（　A_1　/〇A_2　）を選び」，プレイヤーB が，「プレイヤーA が A_1 を選んだとき（〇B_1　/　B_2　）を選び，プレイヤーA が A_2 を選んだとき（〇B_3　/　B_4　）を選ぶ」である。

(3)　次のゲームの木に関する文章について，括弧内に入る適切な数値を書きなさい。また，適切な語句を選ぶ場合には，正しい語句に〇を書きなさい。



1. プレイヤーB が（　B_1 を選ぶ　/〇プレイヤーA が A_1 を選んだとき B_1 を選ぶ　）ことはプレイヤーB の戦略である。
2. プレイヤーA の戦略は（　2　）つあり，プレイヤーB の戦略は（　2　）つある。
3. このゲームの部分ゲーム完全均衡は，プレイヤーA が「（　A_1　/〇A_2　）を選び」，プレイヤーB が，「プレイヤーA が A_1 を選んだとき（　B_1　/〇B_2　）を選ぶ」である。

（2.の解説）プレイヤーA の戦略は「A_1 を選ぶ」と「A_2 を選ぶ」の 2 つであり，プレイヤーB の戦略は「プレイヤーA が A_1 を選んだとき B_1 を選ぶ」と「プレイヤーA が A_1 を選んだとき B_2 を選ぶ」の 2 つである。

(4)　次のストーリー「おもちゃをねだる子供*」について，各問いに答えなさい。

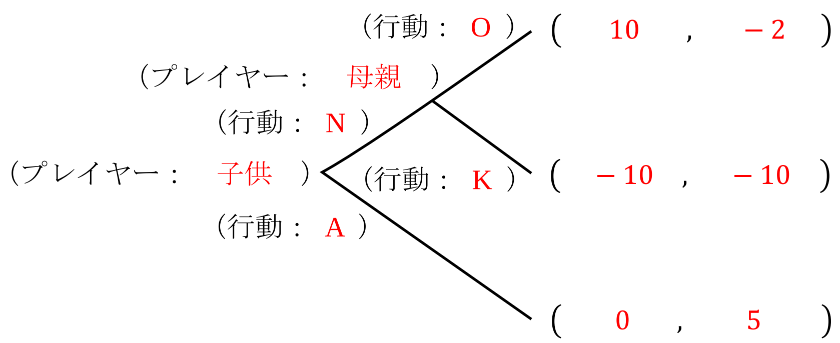
＊ 渡辺隆裕（2008）『ゼミナール ゲーム理論入門』日本経済新聞出版社 p.67

おもちゃ売り場の前で，子供が母親に対して「おもちゃ買って！買って！」と大騒ぎしている。それに対して，母親は「いい加減にしないと置いていきますよ！」と言っている。

この状況において，プレイヤーは「子供」と「母親」である。ただし，子供は「あきらめる；行動 A」か「ねだり続けるか；行動 N」を先に選択でき，母親はその後に「子供を置いていく；行動 K」か「おもちゃを買う；行動 O」を選択することができるとしよう。利得が次のように定められているとする。

- 子供があきらめれば，子供の利得は 0，母親の利得は 5
- おもちゃを買ってもらうと，子供の利得は 10，母親の利得は −2
- 子供を置いていくと子供の利得は −10，大問題になることで母親の利得も −10

1.　この状況を表すように，ゲームの木の括弧内に適切な用語や数値を書きなさい。ただし，行動を記入する箇所は，A, N, K, O のいずれかを記入し，利得は左側が先に行動するプレイヤーの利得，右側が後に行動するプレイヤーの利得とする。



2.　次の括弧内に入る適切な内容に○を書きなさい。

部分ゲーム完全均衡において，子供は（ あきらめ /○ねだり続け ），母親は（ 子供を置いていく /○おもちゃを買う ）ことになる。

3.　部分ゲーム完全均衡を次の選択肢から選び，番号に○を書きなさい。

I.　子供は「あきらめる」，母親は「子供があきらめれば，おもちゃを買う」を選ぶ。

II.　子供は「あきらめる」，母親は「子供があきらめれば，子供を置いていく」を選ぶ。

III.　子供は「ねだり続ける」，母親は「子供がねだり続ければ，おもちゃを買う」を選ぶ。

IV.　子供は「ねだり続ける」，母親は「子供がねだり続ければ，子供を置いていく」を選ぶ。

4.　この問題から得られる教訓として，最も適切な選択肢を次から選び，番号に○を書きなさい。

I.　子供はおもちゃをねだり続けても買ってもらえないものである。

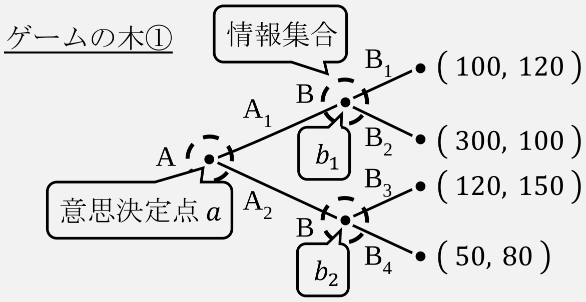
II.　子供は母親に叱られるのが嫌なものなので，おもちゃをあきらめるのである。

III.　子供は置いていかれないことをわかっているので，ねだり続けるのである。

IV.　子供はねだり続けるが，次の機会におもちゃを買ってもらえなくなることが嫌なので，しばらく時間が経てばあきらめるものである。

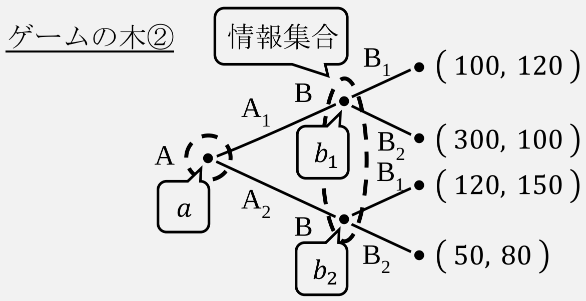
＜補足１２＞ 情報集合【やや難】

本節の最初に表したゲームの木であるが，より正確に書くと次のように，情報集合という点線の丸で意思決定点を囲む必要がある。（ゲームの木①には情報集合が 3 つある）



＊ 点 a，点 b_1，点 b_2 は意思決定点である。

情報集合とは，プレイヤーが識別できない意思決定点の集合（集まり）のことである。これを次のゲームの木②と比較しながら説明していこう。（ゲームの木②は情報集合が 2 つ）



＊ ゲームの木①では B_3，B_4 であった箇所が B_1，B_2 に変わっていることに注意。

ゲームの木②では，意思決定点 b_1 と意思決定点 b_2 が 1 つの情報集合の丸で囲まれている。これは，B さんが「自分は点 b_1 と点 b_2 のどちらにいるのかわからない＝A さんが行動 A_1 を選んだのか行動 A_2 を選んだのかを B さんは観察できていない」ということを意味している。そのため，B さんが選べる行動は B_1 と B_2 の二択になるのである。

それに対して，ゲームの木①では，意思決定点 b_1 と意思決定点 b_2 のそれぞれが別の情報集合の丸で囲まれているため，B さんは「自分は点 b_1 と点 b_2 のどちらにいるかがわかる＝A さんが行動 A_1 を選んだのか行動 A_2 を選んだのかを B さんは観察できている」ということを意味しているのである。（これで情報集合の意味がわかったのではないだろうか）

ところで，＜補足８＞を理解できた人であれば，ゲームの木②は次の利得表

	B_1	B_2
A_1	$(100, 120)$	$(300, 100)$
A_2	$(120, 150)$	$(50, 80)$

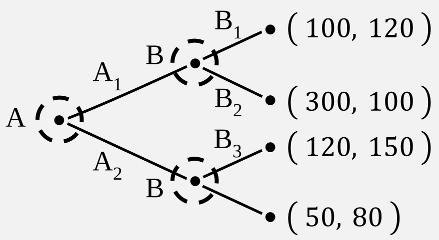
と実質的に同じであることがわかるだろうか（観察できない＝同時）。この利得表は戦略形ゲームであるので，A さんと B さんが同時に戦略を決めるタイプであった。このように，ゲームの木②はこの利得表と同じ状況を表しており，展開形ゲームであっても，情報集合を上手く使うことで，戦略形ゲーム（同時ゲーム）と同じ状況を表すことができるのである。

（ちなみに，この利得表のナッシュ均衡は (A_2, B_1) であるが，「ゲームの木①の部分ゲーム完全均衡と同じだ！」と思ってはいけない。ゲームの木①の部分ゲーム完全均衡は (A_2, B_1) とは書けなかったし，そもそもゲームの木①とゲームの木②はもはや別のゲームである）

＜補足１３＞ 完備情報と完全情報【やや難】

これまで，以下のような利得表やゲームの木をもとに，ナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡を求めてきた。

	協力する B_1	協力しない B_2
協力する A_1	$(2,2)$	$(0,3)$
協力しない A_2	$(3,0)$	$(1,1)$

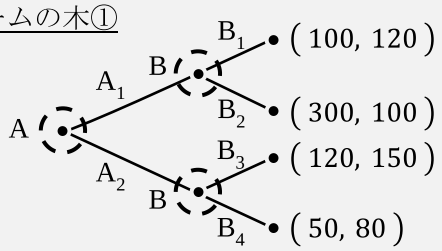


ところで，ナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡を求めるには前提条件がある。それは，各プレイヤーが利得表やゲームの木を知っている必要があるということである。裏を返せば，お互いの利得や戦略の種類などを全プレイヤーがきちんと把握していないと，ナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡を求めることの意味は薄れてしまう。

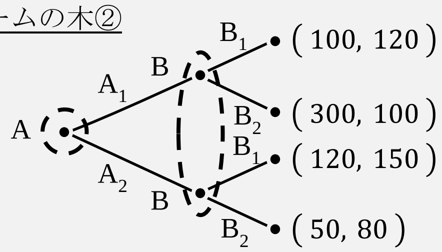
このように各プレイヤーが利得表やゲームの木の情報を知っていることを**完備情報**という（要は，「みんな，ゲームのルールを知っている」）。それに対して，各プレイヤーが利得表やゲームの木について一部知らない情報がある場合を**不完備情報**という。（ゲーム理論には，不完備情報ゲームという応用論点があり，そこで有名な解が**ベイジアン・ナッシュ均衡**である）

ちなみに，完備情報と混乱しやすい用語があり，それが完全情報である。**完全情報**とは，自分の前に行動したプレイヤーが何を選択したかがわかるということであり，展開形ゲームにおいて用いられる用語である。これは＜補足１２＞で用いたゲームの木①と②を例に挙げるとわかりやすい。（以下にゲームの木①と②を再掲）

ゲームの木①



ゲームの木②



＜補足１２＞で説明したように，ゲームの木①では B さんの情報集合が 2 つであり，A さんが何を選択したかがわかっているケース，つまり，これが完全情報であるゲームなのである。それに対して，ゲームの木②では B さんの情報集合が 1 つになっており，これは A さんが何を選択したかがわかっていないという，**不完全情報**であるゲームなのである。

＜補足１４＞ 非協力ゲームと協力ゲーム【やや難】

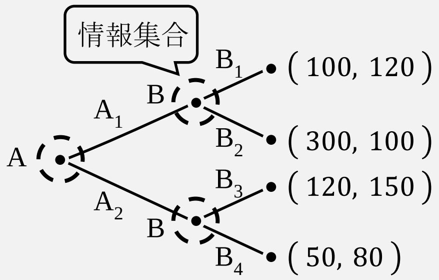
この授業では扱った内容はすべて**非協力ゲーム**という分野になる。それに対して，**協力ゲーム**という分野もある。協力ゲームは，大雑把に言うと，誰と誰が協力するか，また，協力して得られた利得をどう分配するか，といった分析に焦点を当てる。協力ゲームのキーワードには，提携形ゲーム，仁，シャープレイ値などがあり，興味のある方は各自で学ばれたい。

＜補足１５＞ 部分ゲーム完全均衡【やや難】

p.17 で展開形ゲームの解が部分ゲーム完全均衡だと書いたが，「部分ゲーム完全均衡の定義は何？」と思った人も多いだろう。実は，部分ゲーム完全均衡は見つけるのは簡単なのだが，その定義を説明することは難しいのである。

まず，**部分ゲーム完全均衡**の定義は「すべての部分ゲームにおいてナッシュ均衡になる行動戦略の組み合わせ」である。行動戦略という用語は後ほど説明するが，確率的な行動を考えないとき「行動戦略＝（純粋）戦略」になるため，ここでは，部分ゲーム完全均衡とは「すべての部分ゲームにおいてナッシュ均衡になる戦略の組み合わせ」と考えておこう。

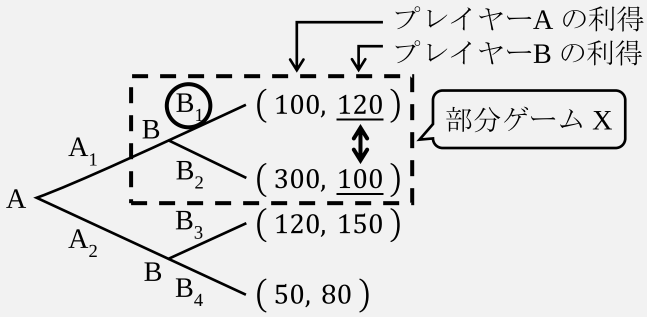
それでは，p.15 のゲームの木



を例に説明していく。（以降，情報集合の記載は省略する）

部分ゲーム完全均衡とは「すべての部分ゲームにおいてナッシュ均衡になる戦略の組み合わせ」であるので，すべての部分ゲーム（X，Y，Z）で，それぞれナッシュ均衡を求めていくことにしよう。

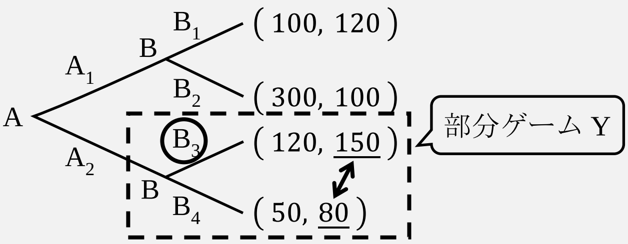
・　部分ゲーム X におけるナッシュ均衡



部分ゲーム X における B さんの最適反応は，行動 B_1 を選択することである。そのため，部分ゲーム X では，B さんの戦略「行動 B_1 を選択する」がナッシュ均衡になるのである。「ん？これがどうしてナッシュ均衡になるの？」と思った人も多いだろう。

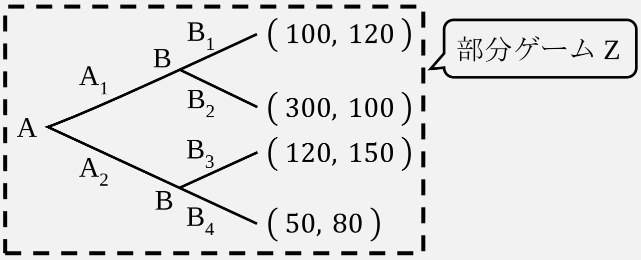
ナッシュ均衡とは，「どのプレイヤーも最適反応をとっているときの戦略の組み合わせ」であった。部分ゲーム X ではプレイヤーが 1 人（B さん）しかおらず，しかも，その B さんが最適反応（行動 B_1）をしているので，部分ゲーム X におけるナッシュ均衡は，B さんの戦略「行動 B_1 を選択する」になるのである。

・　部分ゲーム Y におけるナッシュ均衡



部分ゲーム Y における B さんの最適反応は，行動 B_3 を選択することである。そのため，部分ゲーム Y では，B さんの戦略「行動 B_3 を選択する」がナッシュ均衡になる。

・　部分ゲーム Z（全体のゲームの木）におけるナッシュ均衡



この部分ゲーム Z におけるナッシュ均衡を求めるのは少し難しい。この展開形ゲーム（全体のゲームの木）での A さんと B さんの戦略は p.18 で見たように次の通りであった。

A さんの戦略は次の 2 つ。

① A_1 を選ぶ　：戦略 α_1

② A_2 を選ぶ　：戦略 α_2

B さんの戦略は次の 4 つ。

① A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ　：戦略 β_1

② A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ　：戦略 β_2

③ A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ　：戦略 β_3

④ A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ　：戦略 β_4

＊　戦略 β_1 を戦略 $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_3)$ と書くことも多い。括弧内の左側は「A さんが A_1 を選べば…」，括弧内の右側は「A さんが A_2 を選べば…」に対応しているのである。

これらの戦略からナッシュ均衡を求めるためには，次のような利得表を作ればよい。

	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	(100, 120)	(300, 100)	(100, 120)	(300, 100)
α_2	(120, 150)	(120, 150)	(50, 80)	(50, 80)

この利得表内の利得の設定は，上の戦略 $\alpha_1 \sim \beta_4$ と対応させながら見ていけばわかるだろう（例えば，戦略の組 (α_1, β_1) では，A さんが A_1 を選び，B さんが B_1 を選ぶので，利得はゲームの木より $(100, 120)$）。この利得表のナッシュ均衡は (α_1, β_3) と (α_2, β_1) の 2 つである。つまり，部分ゲーム Z におけるナッシュ均衡は戦略の組 (α_1, β_3) と (α_2, β_1) なのである。

では，各部分ゲームにおけるナッシュ均衡をまとめる。

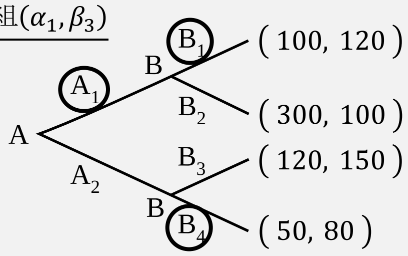
	ナッシュ均衡	
部分ゲーム X	B さんが「B_1 を選ぶ」	
部分ゲーム Y	B さんが「B_3 を選ぶ」	
部分ゲーム Z	A さんは「A_1 を選び」， B さんは「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A_2 を選べば B_4 を選ぶ」	(α_1, β_3)
	A さんは「A_2 を選び」， B さんは「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A_2 を選べば B_3 を選ぶ」	(α_2, β_1)

＊ 下線の波線と二重線は共通している箇所を示す印である。

上の表より，戦略の組 (α_2, β_1) は，すべての部分ゲームにおけるナッシュ均衡の状況を含んでいるため，これが部分ゲーム完全均衡になるのである。(p.19 でも「部分ゲーム完全均衡は，戦略の組 (α_2, β_1) である」と書きましたが，これが正しいことが部分ゲーム完全均衡の定義から確認されたわけです)

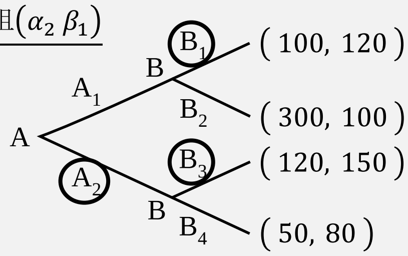
ところで，戦略の組 (α_1, β_3) は部分ゲーム Z におけるナッシュ均衡であったが，部分ゲーム完全均衡ではなかった。戦略の組 (α_1, β_3) と (α_2, β_1) の比較は次の図の通り。

戦略の組(α_1, β_3)



ナッシュ均衡

戦略の組$(\alpha_2\ \beta_1)$



ナッシュ均衡，かつ，部分ゲーム完全均衡

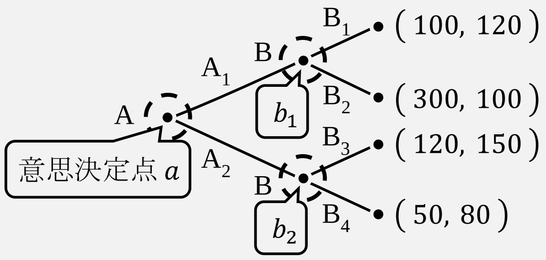
（正確には，部分ゲーム完全均衡もナッシュ均衡に含まれるので，「ナッシュ均衡，かつ，部分ゲーム完全均衡」は正しい表現ではないが，わかりやすさのためこう表現している）

なぜ，戦略の組 (α_1, β_3) が部分ゲーム完全均衡にならないのかというと，左上図の部分ゲーム Y に相当していた箇所において，B さんが明らかに変な行動をしているからである。B さんは得られる利得の大きさから B_3 を選ぶはずであるのに，B_4 を選んでいる（これを空脅しというが，空脅しについて詳しくは<補足１６>を参照)。このような空脅しが含まれた戦略の組は部分ゲーム完全均衡からは除外するのである。つまり，ナッシュ均衡から，より実現する可能性が高い戦略の組に絞ったものが部分ゲーム完全均衡ということになる。このように，いくつかのナッシュ均衡から，より実現する可能性が高い戦略の組に絞っていく作業を（ナッシュ）**均衡の精緻化**という。

さて，最後に（混合）戦略，行動戦略の違いを簡単に説明しておこう。これらの概念をきっちりと区別する必要性が出てくるのは，本格的にゲーム理論を勉強しようとする場合であろう。そのため，そのような読者を想定して一言付け加えておくことにしよう。

まず，そもそも，混合戦略，行動戦略は，どちらも「戦略」である。そのため，「戦略と行動戦略の違いは何ですか？」という質問は，質問自体がおかしい。また，＜補足１７＞で説明するように，純粋戦略は広い意味での混合戦略であるので，「混合戦略，行動戦略の違いは何ですか？」 という質問が正しい質問である。それではこの後者の正しい質問について答えていこう。

次のゲームの木における，混合戦略と行動戦略を具体的に示すので，この具体例から違いを理解してほしい。



［混合戦略］

・　A さんの混合戦略

A_1 を選択する確率を p とし，A_2 を選択する確率を $1-p$ とする。

＊ この文章自体が A さんの混合戦略である。わかりにくい人は p の値を設定することが混合戦略だと考えるとどうだろうか。

⇒ $p=1$ とすると，A さんが A_1 を選択するという純粋戦略になる。

・　B さんの混合戦略

「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」を選ぶ確率を q_1，
「A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」を選ぶ確率を q_2，
「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ」を選ぶ確率を q_3，
「A さんが A_1 を選べば B_2 を選び，A さんが A_2 を選べば B_4 を選ぶ」を選ぶ確率を $1-q_1-q_2-q_3$ とする。

＊ 5 行に渡るこの文章が B さんの混合戦略である。

⇒ $q_1=1, q_2=q_3=0$ とすると，B さんが「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」を選ぶという純粋戦略になる。

［行動戦略］

・　A さんの行動戦略

（意思決定点 a において）A_1 を選択する確率を s とし，A_2 を選択する確率を $1-t$ とする。

＊ A さんの場合，混合戦略＝行動戦略

・　B さんの行動戦略

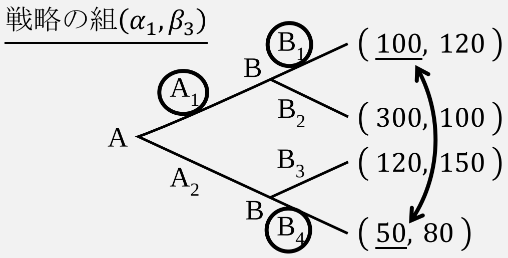
（意思決定点 b_1 において）B_1 を選択する確率を t_1，B_1 を選択する確率を $1-t_1$ とし，
（意思決定点 b_2 において）B_3 を選択する確率を t_2，B_4 を選択する確率を $1-t_2$ とする。

⇒ $t_1=t_2=1$ とすると，混合戦略において $q_1=1, q_2=q_3=0$ とした場合の「A さんが A_1 を選べば B_1 を選び，A さんが A_2 を選べば B_3 を選ぶ」を選ぶという純粋戦略と等しくなる。そのため，確率的な行動を考えないときは「行動戦略＝（純粋）戦略」になるのだ。

＜補足１６＞ 空脅し【やや難】

空脅し（カラ脅し；信憑性のない脅し）について説明していこう。

＜補足１５＞において，次の戦略の組 (α_1, β_3) は，B さんが利得の大きさから B_3 を選ぶはずであるのに，B_4 を選ぶという「変な行動」をとっているので，ナッシュ均衡ではあるが，部分ゲーム完全均衡からは除外するということであった。

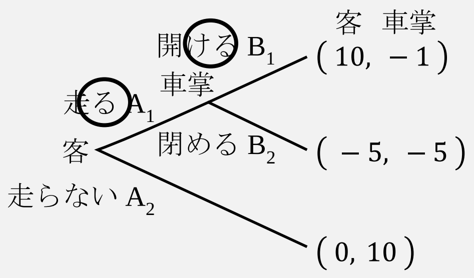


ナッシュ均衡（部分ゲーム完全均衡ではない）

この B さんが B_4 を選ぶという「変な行動」を空脅しというというが，この行動のどこが空「脅し」なのだろうか。それは，もし仮に A さんが A_2 を選ぶと A さんの利得は 100 から 50 に下がってしまうからである。つまり，B さんが「A さんよ。もし A_2 を選んだら，俺は B_4 を選んじゃうよ。そうしたら，A さんの利得は（100 から 50 に）下がっちゃうよ」という状況になっていうから「脅し」なのである。では，なぜ「空」脅しや「信憑性のない」脅しと呼ばれるのかというと，それは，**＜補足１５＞**でも説明したように，部分ゲーム Y では B さんは B_3 を選ぶはずで，B さんの「B_4 を選ぶよ」という発言は信憑性がないからなのである。

空脅しについては，もっとストーリー性があると面白いので，別の例を挙げよう。動画授業でも解説した「駆け込み乗車」の例を用いることとしよう。

このゲームの木における戦略は，（乗）客は走る A_1 を選ぶ（戦略 α_1 ），走らない A_2 を選ぶ（戦略 α_2 ），車掌は客が走る A_1 を選ぶなら扉を開ける B_1 を選ぶ（戦略 β_1 ），客が走る A_1 を選ぶなら扉を閉める B_2 を選ぶ（戦略 β_2 ）である。



客＼車掌	開ける β_1	閉める β_2
走る α_1	$(10, -1)$	$(-5, -5)$
走らない α_2	$(0, 10)$	$(0, 10)$

このゲームの部分ゲーム完全均衡は，戦略の組 (α_1, β_1) ，つまり，「客は走るという戦略を選び，車掌は客が走ってくるなら扉を開けるという戦略を選ぶ」である。

しかし，右上の利得表のように，このゲームのナッシュ均衡としては戦略の組 (α_2, β_2) も存在する。これは，車掌の「お客さん。もし走るを選んだら，私は扉を閉めますよ。そうしたら，お客さんは扉に挟まれて利得が（ 10 から -5 に）下がっちゃうよ！（だた，実際には私の利得が下がるから扉を開けちゃうんだけどね…)」という空脅しが存在しているのである。(ちなみに，動画授業の参入阻止の例では，B 店の「対抗する」が空脅しになっている)

＜補足１７＞ 混合戦略【やや難】

第 15 講の動画授業で次のような男女の争いを紹介した。（男性：Male，女性：Female）

		q	$1-q$
		野球 F_1	買い物 F_2
p	野球 M_1	(2, 1)	(0, 0)
$1-p$	買い物 M_2	(0, 0)	(1, 2)

デートが成立する箇所がナッシュ均衡で，それは (M_1, F_1) と (M_2, F_2) の 2 箇所であった。しかし，実はこのゲームのナッシュ均衡はもう 1 つある。この隠れたナッシュ均衡の求め方は次の通りである。

男性が野球 M_1 を選ぶ確率を p（確率：probability），買い物 M_2 を選ぶ確率を $1-p$（と女性が予想する）とし，女性が野球 F_1 を選ぶ確率を q，買い物 F_2 を選ぶ確率を $1-q$（と男性が予想する）とする。このように，「確率的に戦略を選ぶ」という戦略を**混合戦略**という。それに対して，これまで見てきたような戦略は**純粋戦略**（純戦略）という。(ただし，$p=1$ や $p=0$ などのケースが純粋戦略であるため，純粋戦略も広い意味では混合戦略である)

＊ 確率はすべて足しても 1（100%）にしかならないので，p と $1-p$ などと設定する。

ここで，男性が野球 M_1 を選んだ場合の男性の**期待利得**（利得の期待値）を計算する。期待値とは，値とその値をとる確率をかけ算し，すべて足し合わせたものであるが，この説明文では伝わりづらいので実際に計算してみよう。

		$\underline{q}$	$\boxed{1-q}$
		野球 F_1	買い物 F_2
p	野球 M_1	($\underline{2}$, 1)	($\boxed{0}$, 0)
$1-p$	買い物 M_2	(0, 0)	(1, 2)

男性が野球 M_1 を選んだ場合の男性の期待利得 $= \underline{2} \times \underline{q} + \boxed{0} \times \left(\boxed{1-q}\right) = 2q$　…（Ⅰ）

＊ 表中の下線と四角囲いは，式中の下線と四角囲いに対応している。

なぜこのように式が書けるのかというと，その理由は表中の太線の四角内にある。もし女性が野球 F_1 を選べば，男性の利得は 2 になるわけだが，この利得 2 が実現する確率は q である（なぜなら，女性が野球 F_1 を選ぶ確率が q だからである)。同様に，もし女性が買い物 F_2 を選べば，男性の利得は 0 になるわけだが，この利得 0 が実現する確率は $1-q$ である。したがって，期待値を計算すると，$2 \times q + 0 \times (1-q) = 2q$ となったというわけである。

同様に考えると，

男性が買い物 M_2 を選んだ場合の男性の期待利得 $= \underline{0} \times \underline{q} + \boxed{1} \times \left(\boxed{1-q}\right) = 1-q$　…（Ⅱ）

になる。（下表との対応をよく見て欲しい）

		$\underline{q}$	$\boxed{1-q}$
		野球 F_1	買い物 F_2
p	野球 M_1	(2, 1)	(0, 0)
$1-p$	買い物 M_2	($\underline{0}$, 0)	($\boxed{1}$, 2)

（Ⅰ）式と（Ⅱ）式から，

$$\underbrace{2q}_{\text{野球 M}_1} \quad > \quad \underbrace{1-q}_{\text{買い物 M}_2} \qquad \left(\to\ 3q>1\ \to\ q>\frac{1}{3}\right)$$

とすると，この不等式（$2q>1-q$）は，男性は買い物 $\mathrm{M_2}$ を選ぶより野球 $\mathrm{M_1}$ を選んだときの期待利得の方が大きいことを意味している。

言い換えると，$q>1/3$ のとき，男性は野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶべき（つまり，野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶ確率である p の値を 1 にすべき）ということである。これは，$q>1/3$ のときの男性の最適反応は $p=1$ になるということである。（直感的には，女性の野球 $\mathrm{F_1}$ を選ぶ確率 q が高ければ，男性も野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶべき，というごく当然な内容である）

逆に，

$$\underbrace{2q}_{\text{野球 M}_1} \quad < \quad \underbrace{1-q}_{\text{買い物 M}_2} \qquad \left(\to\ 3q<1\ \to\ q<\frac{1}{3}\right)$$

であれば，$q<1/3$ のとき，男性は買い物 $\mathrm{M_2}$ を選ぶべき（野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶ確率 p の値を 0，つまり，買い物 $\mathrm{M_2}$ を選ぶ確率 $1-p$ の値を 1 にすべき）ということになる。これは，$q<1/3$ のときの男性の最適反応は $p=0$ になるということである。（直感的には，女性が買い物を選びそうなら，男性も買い物を選ぶべきということ）

次に，

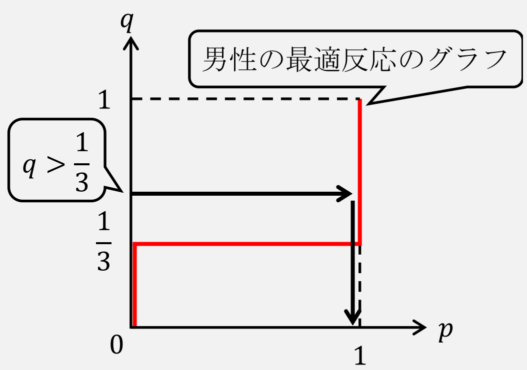
$$\underbrace{2q}_{\text{野球 M}_1} \quad = \quad \underbrace{1-q}_{\text{買い物 M}_2} \qquad \left(\to\ 3q=1\ \to\ q=\frac{1}{3}\right)$$

とすると，この等式（$2q=1-q$）は，男性は野球 $\mathrm{M_1}$ を選んでも買い物 $\mathrm{M_2}$ を選んでも期待利得は変わらないことを意味している。言い換えると，$q=1/3$ のとき，男性は野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶ確率 p をどのような値（$0\le p\le 1$）にしても期待利得は変わらないということになる。これは，$q=1/3$ のときの男性の最適反応は $0\le p\le 1$（要は p の値は何でもいい）になるということである。

＊ ≤と≦は同じ意味であるが，大学（や海外）では≤を用いる。

これで男性の最適反応が出そろったので，まとめると左下のようになる。これをグラフで書いたものが右下図である。（横軸も縦軸も確率であるので，0 から 1 までの値をとる）

$$\text{男性の最適反応：}\begin{cases} q>\dfrac{1}{3}\text{ のとき，}\ p=1 \\ q<\dfrac{1}{3}\text{ のとき，}\ p=0 \\ q=\dfrac{1}{3}\text{ のとき，}\ 0\le p\le 1 \end{cases}$$



右上図中のグラフが男性の最適反応を表していることは，矢印の箇所を見ればわかるだろう。この矢印は $q>1/3$ のときの男性の最適反応は $p=1$ になることを表している。

ここまで長々と説明してきたが，ようやく男性の最適反応がわかった。次は，女性の最適反応についてである。考え方は男性の最適反応の求め方と同じであるので駆け足でいこう。

		q	$1-q$
		野球 F_1	買い物 F_2
$\underline{p}$	野球 M_1	$(2, \underline{1})$	$(0, 0)$
$\boxed{1-p}$	買い物 M_2	$(0, \boxed{0})$	$(1, 2)$

女性が野球 F_1 を選んだ場合の女性の期待利得 $= \underline{1} \times \underline{p} + \boxed{0} \times (\boxed{1-p}) = p$　…（Ⅲ）

次に，

		q	$1-q$
		野球 F_1	買い物 F_2
$\underline{p}$	野球 M_1	$(2, 1)$	$(0, \underline{0})$
$\boxed{1-p}$	買い物 M_2	$(0, 0)$	$(1, \boxed{2})$

女性が買い物 F_2 を選んだ場合の女性の期待利得 $= \underline{0} \times \underline{p} + \boxed{2} \times (\boxed{1-p}) = 2 - 2p$　…（Ⅳ）

（Ⅲ）式と（Ⅳ）式から，

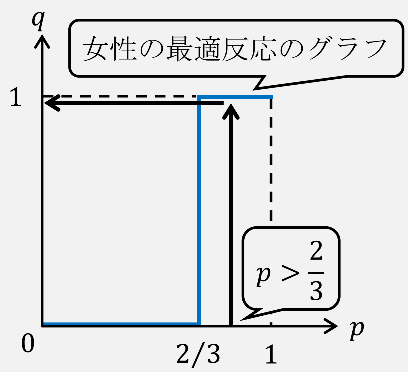
$$\underbrace{p}_{\text{野球} F_1} > \underbrace{2-2p}_{\text{買い物} F_2} \quad \left(\to 3p > 2 \to p > \frac{2}{3}\right)$$

とすると，この不等式（$p > 2 - 2p$）は，女性は買い物 F_2 を選ぶより野球 F_1 を選んだときの期待利得の方が大きいことを意味している。これは，$p > 2/3$ のときの女性の最適反応は野球 F_1 を選ぶこと（$q = 1$）になるということである。

逆に，$p < 2/3$ のときの女性の最適反応は買い物 F_2 を選ぶこと（$q = 0$）になる。また，$p = 2/3$ のときの女性の最適反応は $0 \leq q \leq 1$（要は q の値は何でもいい）になる。

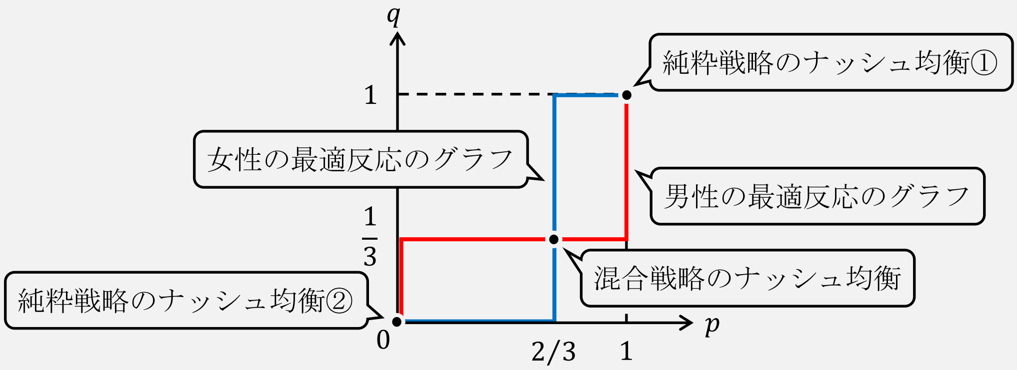
女性の最適反応は左下のようにまとめることができ，グラフに書くと右下図になる。

$$\text{女性の最適反応：}\begin{cases} p > \dfrac{2}{3} \text{のとき，} q = 1 \\ p < \dfrac{2}{3} \text{のとき，} q = 0 \\ p = \dfrac{2}{3} \text{のとき，} 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$$



右上図中の矢印は $p > 2/3$ のときの女性の最適反応が $q = 1$ になることを表している。もちろん，$p < 2/3$ のときの女性の最適反応が $q = 0$ になることや，$p = 2/3$ のときの女性の最適反応が $0 \leq q \leq 1$ になることもこのグラフで表されている。

最後に，男性の最適反応のグラフと女性の最適反応のグラフを 1 つの図に書き入れよう。



上図から，男性の最適反応のグラフと女性の最適反応のグラフには交点が 3 つあることがわかる。その 3 点を座標で表すと次の通りである。

$$(p,q)=(1,1),(0,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

これら 3 点はナッシュ均衡である。なぜなら，男性の最適反応のグラフと女性の最適反応のグラフの交点ということは，男性と女性が同時に最適反応していることになるので，まさにナッシュ均衡の定義そのものなのである。

ところで，$(p,q)=(1,1)$ と $(p,q)=(0,0)$ は純粋戦略のナッシュ均衡であり，動画授業でも確認した以下の利得表における 2 つのナッシュ均衡に対応している。（p は男性が野球 $\mathrm{M_1}$ を選ぶ確率，q は女性が野球 $\mathrm{F_1}$ を選ぶ確率であったので，$(p,q)=(1,1)$ は男性が野球 $\mathrm{M_1}$ を選び，女性が野球 $\mathrm{F_1}$ を選ぶことを意味している）

$(p,q)=(1,1)$ に対応

	野球 $\mathrm{F_1}$	買い物 $\mathrm{F_2}$
野球 $\mathrm{M_1}$	(2, 1)	(0, 0)
買い物 $\mathrm{M_2}$	(0, 0)	(1, 2)

$(p,q)=(0,0)$ に対応

それに対して，$(p,q)=(2/3,1/3)$ が混合戦略のナッシュ均衡であり，これが利得表には表れていない隠れたナッシュ均衡だったのである。

ところで，ジョン・ナッシュは，混合戦略まで考慮に入れると，すべての戦略形ゲームにナッシュ均衡が存在することを証明している。第 15 講の動画授業では，じゃんけんにはナッシュ均衡はないと言ったが，じゃんけんにも混合戦略のナッシュ均衡は存在する。計算はゲーム理論の入門書に譲るが，じゃんけんでの混合戦略のナッシュ均衡は，各プレイヤーとも，グー・チョキ・パーを等確率（1/3，つまり 33.3%ずつの確率）で出すことなのである。

ところで，じゃんけんグリコ（グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 6 歩，パーで勝てば 6 歩進めるルール）はどうだろうか？ナッシュ均衡はあるのだろうか？我田引水になってしまい恐縮であるが，以前，私はグリコについて共同研究者と論文を書いたことがある。論文の主な内容は，ゴールまでの残り歩数によって，混合戦略のナッシュ均衡は異なるというものであった。例えば，A さんと B さんがグリコをするとし，A さんはあと 10 歩でゴール，B さんはあと 20 歩でゴールするとしよう。混合戦略のナッシュ均衡では，A さんはグーを 39.6%，チョキを 41.0%，パーを 19.4%で出すといったような結論が得られるのである。

加藤真也・小嶋寿史（2019）「「グリコ」のゲーム理論的アプローチ」岡山商大論叢，第 34 巻第 3 号

＜補足１８＞ 進化ゲーム【やや難】

最後に，生物学で始まったゲーム理論の分野である「進化ゲーム」について簡単に紹介しよう。岡田（2014）p.259 の「コンピュータの OS 選択」を例に説明していく。

＊ 岡田章（2014）『ゲーム理論・入門 新版－人間社会の理解のために』有斐閣

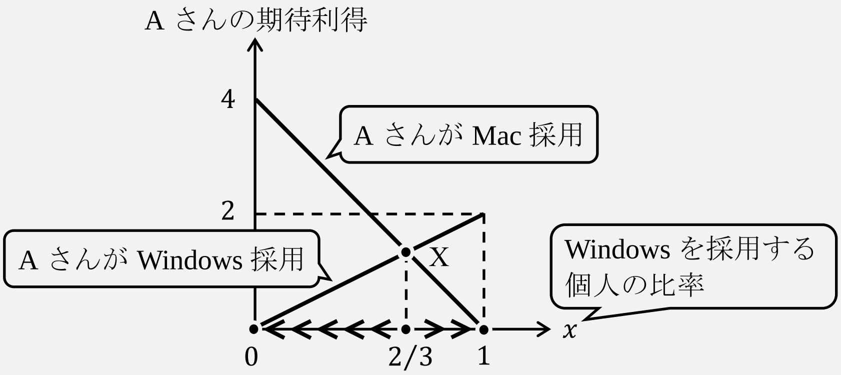
コンピュータの OS として代表的なものに Windows と Mac がある。次の利得表で表される A さんと B さんの 2 人ゲームがあるとする。この利得表が意味することは，2 人が別々の OS を用いていると双方にとって不便であり，どちらか一方の OS を 2 人が用いた方が便利だということだ。（利得は数値例であり，Windows の方の利得を高くしてもいいだろう）

	x	$1-x$
	Windows B_1	Mac B_2
Windows A_1	(2, 2)	(0, 0)
Mac A_2	(0, 0)	(4, 4)

この利得表のナッシュ均衡は 2 つあり，戦略の組 (A_1, B_1) と (A_2, B_2) である。もちろん，どちらの戦略の組が実現するかはわからない。そこで，進化ゲームではこの利得表から，次のようにして社会の人々が Windows を採用するのか Mac を採用するかを考えるのである。

Windows を採用する個人の比率を x とし，Mac を採用する個人の比率を $1-x$ とする。（上の利得表では，**＜補足１７＞**で学んだように B さんが Windows を採用する確率を x，Mac を採用する確率を $1-x$ とするかのように書いている）

このとき，A さんの期待利得は，Windows を採用するとき，$2 \cdot x + 0 \cdot (1-x) = 2x$ となり，Mac を採用するとき，$0 \cdot x + 4 \cdot (1-x) = -4x + 4$ となる。これより下図が書ける。



この 2 直線の連立方程式から，$2x = -4x + 4 \ \rightarrow \ 6x = 4 \ \rightarrow \ x = 2/3$ と，点 X の x 座標の値を求めることができる。さて，$x = 2/3$，つまり，Windows を採用する個人の比率が $2/3$（66.7%）より小さい場合（点 X よりも左側の場合），2 直線のうち「A さんが Mac 採用」の直線が「A さんが Windows 採用」の直線よりも上にある。これは，A さんを含め，個人にとって Mac を採用することの期待利得が Windows を採用する期待利得よりも高いことを表している。すると，人々はどんどん Mac を採用していき，長期的には $x = 0$（Windows を採用する個人の比率が 0。つまり，全員 Mac を採用する）となるのである（逆に，Windows を採用する個人の比率が $2/3$ より大きい場合は長期的に $x = 1$ になる。つまり，全員 Windows を採用する）。このように，長期的にコンピュータの OS のどちらが主流になるかは，利得の大きさや，初期状態（初期の x の値）が重要だということがわかるだろう。