はじめよう経済学　ー問題編ー
第 4 講　限界効用と限界代替率

第 4 講では，限界効用と限界代替率について学んでいきます。授業では，限界効用と限界代替率の関係（ $MRS = MU_x/MU_y$ ）について説明しましたが，今回はこの関係式を利用した限界代替率 MRS の求め方に慣れてもらいたいと思います。ところで，限界代替率 MRS を求めるには，「微分・偏微分のやり方」や「指数の計算方法」に慣れていないといけません。多少ハードルの高い計算にはなりますが，今回用意したたくさんの計算問題を解いているうちに徐々に慣れてくることでしょう。これらの計算に慣れることができれば，次回学ぶ「効用最大化問題」も簡単に解けるようになります。

ところで前回，予算線と無差別曲線を学びましたが，今回登場する限界効用と限界代替率は無差別曲線に関する内容になります。

＜第 4 講のノーテーション＞

x：X 財の数量（**消費量**，購入量，需要量）　y：Y 財の数量（**消費量**，購入量，需要量）

MU_x:X 財に関する限界効用　MU_y:Y 財に関する限界効用　U：効用

MRS：（X 財の Y 財に対する）限界代替率

目次

＜補足一覧＞

© 2020 Shinya Kato

1. 限界効用（1財モデル）

本節では 1 財モデルを考えていくことにしよう。1 財モデルとは，財が 1 種類しかない（例えば，りんごしか売っていない）状況を意味する。そして，もし一種類の財（りんご）しか売っていなければ，りんごの消費量xが決まったときに効用Uの値が決定すると考えるのである。それを表したのが次の効用関数である。

$$U = \sqrt{x}$$

この効用関数から，りんごを 4 個食べれば（$x = 4$），効用は，

$$U = \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

と決定するのである。（**総効用**は 2 と表現することもある）

次に，**限界効用**MUとは，**財をさらに 1 つ（1 単位）消費することによる効用の増加分**のことである（具体的なイメージとしては，白ご飯で考えたときの限界効用は「ご飯をもう 1 杯おかわりしたときに増える効用」のこと）。

効用関数$U = \sqrt{x}\ (= x^{\frac{1}{2}})$に対して，限界効用$MU$は

$$MU = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

である。（$\frac{dU}{dx}$は，「$U = \cdots$」の式（つまり，効用関数）をxで微分するという意味）

この限界効用MUに，りんごを 4 個食べれば（$x = 4$）を代入すれば，

$$MU = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

となる。この$MU = \frac{1}{4}$の意味は，りんごをさらに 1 つ食べる（つまり，5 個目のりんごを食べる）ことによって，効用は$\frac{1}{4}$だけ増えることを意味している。

このように，限界効用を求めるには微分をする必要がある。微分は第 0 講の「経済数学入門」でも取り上げているが，ここでも計算方法を簡単に復習しておくことにしよう。

ひとまず，次の 2 つの「指数のルール」と 3 つの「微分の計算方法」を頭に入れておこう。これらの計算パターンを組み合わせれば，様々な計算問題にも対応することができるのである。（計算が苦手な人はこれらの計算パターンをよく見てしっかりと覚えておこう！）

ポイント

指数のルール 1	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$		
指数のルール 2	$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	⇒	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
微分の計算方法 1	$y = 4x^3 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 4 \times 3x^{3-1} = 12x^2$	⇒	$y = ax^b \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = abx^{b-1}$
微分の計算方法 2	$y = 5x \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 5$	⇒	$y = ax \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = a$
微分の計算方法 3	$y = 2 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 0$	⇒	$y = a \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 0$

© 2020 Shinya Kato

【問題】

(1)　次の文章中の括弧内に入る適切な語句や数値を書きなさい。

1. 限界効用とは，財をさらに（　　　）つ消費することによる（　　　　　）の増加分のことである。もしくは，財の消費量をさらに（　　　）つ減らすことによる（　　　　　）の減少分とも考えてもよい。
2. 財をさらに 1 つ消費することで効用が 3 だけ増えれば，限界効用は（　　　）である。
3. 限界効用が 5 であれば，財をさらに 1 つ消費することで効用が（　　　）だけ増える。
4. 限界効用は，効用曲線の接線の（　　　　　）で表される。
5. （　　　　　　　　　　　　　　　）の法則とは，消費量 x が増加するにつれ，限界効用 MU が減少していくことをいい，要は，その財を消費すればするほどその財に飽きていくことを意味する。

＜補足１＞　「逓」という漢字

逓（てい）

経済学では「逓減する」や「逓増する」といった用語が出てくる。「逓」という漢字には，「次第に」や「だんだんと」という意味がある。そのため，限界効用逓減の法則というのは，消費量 x が増加するにつれ，限界効用 MU が「だんだんと」減少していくことを表しているのである。

(2)　次の英単語，漢字を 3 回ずつ書きなさい。

限界効用 MU　　Marginal Utility

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　），
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　），
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

逓減　　　（　　　　　　），（　　　　　　），（　　　　　　）

(3)　次の文章中の括弧内に入る適切な数値を書きなさい。

1. りんご 1 つを 1 単位とすると，りんご 3 つは（　　　）単位である。
2. 肉 1kg を 1 単位とすると，肉 5kg は（　　　）単位である。
3. 水 1L（リットル）を 1 単位とすると，水 10L は（　　　）単位である。
4. 水 10L を 1 単位とすると，水 70L は（　　　）単位である。
5. 水 1mL（ミリリットル）を 1 単位とすると，水 100mL は（　　　）単位である。
6. りんご 2 個を 1 単位とすると，りんご 8 個は（　　　）単位である。

© 2020 Shinya Kato

＜補足２＞ 単位のとり方

限界効用とは「財をさらに 1 つ（1 単位）消費することによる効用の増加分」のことであったが，1 つ（1 単位と言う方が正確です）という概念について深掘りしておく（第 3 講の**＜補足２＞**も参照）。

経済学で「1 単位」というと，単位のとり方は何でもよいと考える。例えば，上記の問題(3)のように，水 1L を 1 単位としても，水 100mL を 1 単位としてもいいし，りんご 2 個を 1 単位と考えてしまっても何ら問題ないのである。これは,「鉛筆 12 本」を「鉛筆 1 ダース」と言い換えることと同じアイデアなのである。ただ，この授業ではイメージのしやすさを優先して「りんご 1 つ」といったような言い方をするのである。

【例題】

(1)　効用関数 $U = 5x$ （x：消費量）の限界効用 MU を求めなさい。

（解答）

$$MU = \frac{dU}{dx} = 5$$

$MU = \quad 5$

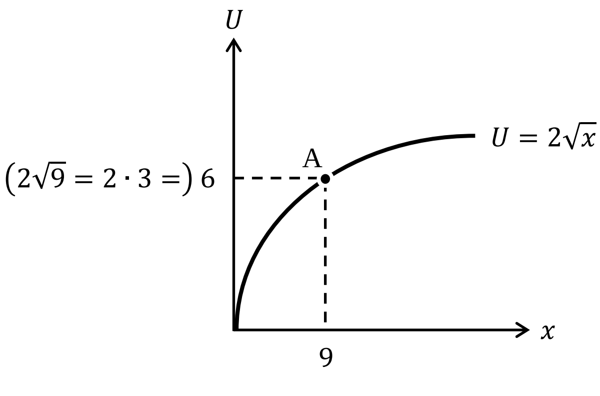
(2)　効用関数 $U = 2\sqrt{x}$ （x：消費量）の限界効用 MU を求め，グラフを書きなさい。ただし，$x = 9$，$U = 6$ となる点 A を通ること。

（解答）

$U = \sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ より，$MU = \dfrac{dU}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\left(= \dfrac{1 \times \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} \right)}_{\text{有理化}}$

$MU = \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

＊ $MU = x^{-\frac{1}{2}}$ を解答にしても OK。また，有理化はしなくてよい。



© 2020 Shinya Kato

【問題】

(1)　次の各効用関数における限界効用 MU を求めなさい。

1.　$U = 2x$

$MU =$ ________

2.　$U = 3x^2$

$MU =$ ________

3.　$U = \sqrt{x}$

$MU =$ ________

4.　$U = 2\sqrt{x}$

$MU =$ ________

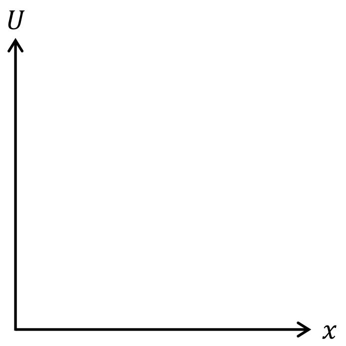
5.　$U = 10\sqrt{x}$

$MU =$ ________

6.　$U = 6x^{\frac{2}{3}}$

$MU =$ ________

(2)　効用関数 $U = \sqrt{x}$ をグラフで書きなさい。ただし，$x = 4$，$U = 2$ となる点 A もグラフ中に明記しなさい。



© 2020 Shinya Kato

(3)　次の各効用関数において，消費量 $x=4$ における限界効用 MU を求めなさい。

1.　$U=10x^2$

$MU=$ ＿＿＿＿

2.　$U=2\sqrt{x}$

$MU=$ ＿＿＿＿

3.　$U=3\sqrt{x}$

$MU=$ ＿＿＿＿

4.　$U=x$

$MU=$ ＿＿＿＿

問題(3)の 4.のような効用関数では，限界効用 MU が定数となる。例えば，MU が 5 という定数になれば，これは消費量 x の値に関わらず，MU は常に 5 という値をとるということになる。これが意味するところは，ものすごくたくさん消費した状態から，さらに 1 つ「おかわり」しても効用が 5 だけ増加するということである。これは限界効用が逓減しない，つまり，どれだけ消費しても飽きないということを意味しているのである。

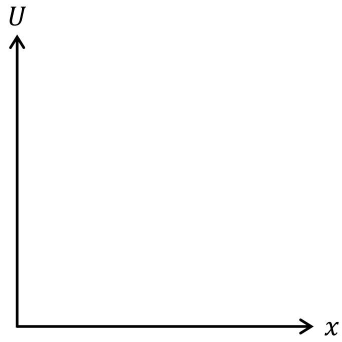
＜補足３＞ １財モデルの考え方

本節で登場した 1 財モデルは，限界効用 MU などの基本的な概念を理解するためのモデルという位置づけである。例えば，前回の第 3 講で学習した予算線や無差別曲線の話は 2 財モデル（りんごとみかん）であったが，1 財モデルは 2 財モデルを理解しやすくするための準備である。そもそも，1 財しかないと効用最大化の話が単純になってしまう。りんご 1 個 100 円で所得が 1000 円であれば，効用を最大化するりんごの消費量は（りんごが好きな財だとすれば，効用関数の形によらず）10 個$(=1000\div 100)$となり，これ以上の議論ができなくなってしまうのである。2 財モデルを考えるからこそ，りんごを買う量を減らして，みかんをたくさん買おうといった行動を分析することができるようになる。

© 2020 Shinya Kato

(4)　効用関数が $U=\sqrt{x}$（x：消費量）であるとき，次の各問いに答えなさい。

1.　効用関数をグラフで書き，消費量 $x=4$ における接線も書き込みなさい。



2.　1.における接線の傾き（限界効用 MU）を求めなさい。

$MU=$ ＿＿＿＿＿＿

3.　消費量 $x=9$ における限界効用 MU を求めなさい。

$MU=$ ＿＿＿＿＿＿

4.　消費量 $x=16$ における限界効用 MU を求めなさい。

$MU=$ ＿＿＿＿＿＿

5.　2.から 4.より限界効用 MU は，消費量 x の増加に伴って減少していることがわかるが，このような法則を何と言うか。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

6.　5.の法則が意味することとして，最も適切な内容の文章を次から選びなさい。

①　消費すればするほど，効用が減少する。

②　消費すればするほど，効用が増加する。

③　消費すればするほど，効用が上がりにくくなる。

④　消費すればするほど，効用が下がりにくくなる。

＿＿＿＿＿＿

このようにルート $\sqrt{\ }$ を含んだ効用関数は，経済学でよく登場する。なぜなら，限界効用逓減の法則を満たすので，私たちの「消費すればするほど，次第に飽きてくる」という感覚を上手く表現してくれているからなのである。

© 2020 Shinya Kato

(5)　次の選択肢のうち，限界効用逓減の法則とは最も関係のない選択肢を選びなさい。

① りんごをたくさん食べたので，りんごに飽きてきた。

② この映画，一回目観たときはすごく面白く感じたのになぁ。

③ 二日目のカレーはおいしいから，今日はカレーを食べないでおこう。

④ このテーマパークには何度も行ったので，最近は行っていない。

＿＿＿＿＿

＜補足４＞ 限界＝Marginal

限界効用は「財をさらに 1 つ消費することによる効用の増加分」であったが，ここでの「限界」とは「能力の限界」などという“limit”（限界）を意味するのではない。限界効用の「限界」に対応する単語は“marginal”である。“marginal”は「縁（ふち）の」(← 縁（へり）とも読む）という意味になる。

例えば，ご飯を 10 杯食べている状況から，ご飯をもう 1 杯おかわりするとする。ご飯を 10 杯食べている状況を「縁に立っているような状況」と考えて，そこからもう 1 歩進む（もう 1 杯おかわりをする）ということが，限界効用の意味「11 杯目のご飯を食べることで増える効用」に対応しているのである。

© 2020 Shinya Kato

2. 限界効用（2財モデル）

本節では，2 種類の財しか売っていないと考える 2 財モデルを学んでいく。前回の第 3 講で学んだ予算線や無差別曲線では，2 財（りんごとみかん）を考えていた。そのため，本節の 2 財モデルこそが予算線や無差別曲線を考える上で大切なのである。

前節の 1 財モデルでは，効用関数は

$$U=\sqrt{x} \quad （x：りんごの消費量）$$

というように，りんごの消費量が決まれば，ある人の効用が決まると考えた。この場合，効用 U を決定するのはりんごの消費量 x のみ（1 変数）である。

それに対して 2 財モデルの効用関数は

$$U=xy \quad （x：りんごの消費量，y：みかんの消費量）$$

というように，りんごとみかんの消費量が決まれば，ある人の効用が決まると考える。この場合，効用 U を決定するのはりんごの消費量 x とみかんの消費量 y（2 変数）となる。

1 財モデルの場合，限界効用 MU を求めるには効用関数を x で「微分」して求めた。

$$MU=\frac{dU}{dx}$$

それに対して 2 財モデルでは，限界効用 MU は 2 種類ある。りんご（X 財）に関する限界効用 MU_x とみかん（Y 財）に関する限界効用 MU_y である。

まず，りんごに関する限界効用 MU_x を求めるには効用関数を x で「偏微分」した

$$MU_x=\frac{\partial U}{\partial x}$$

で求めることができ，みかんに関する限界効用 MU_y は効用関数を y で「偏微分」した

$$MU_y=\frac{\partial U}{\partial y}$$

で求めることができる。（微分の場合は「d」を用いたが，偏微分の場合は「∂（ラウンド）」という記号を用いる。「∂」はギリシャ文字ではなく数学記号である）

りんごに関する限界効用 MU_x の解釈は，

「みかん（Y 財）の消費量を一定として，
りんご（X 財）をさらに 1 つ消費することによる効用の増加分」

になる。噛み砕いて言うと，「みかんを食べる量は変えずに，りんごだけをもう 1 つ食べたときに増える効用」のことである。

同様に考えると，みかんに関する限界効用 MU_y の解釈は，

「りんご（X 財）の消費量を一定として，
みかん（Y 財）をさらに 1 つ消費することによる効用の増加分」

になり，「りんごを食べる量は変えずに，みかんだけをもう 1 つ食べたときに増える効用」と考えればよい。

© 2020 Shinya Kato

では，偏微分の計算方法を確認しておこう。(偏微分の計算問題も第 0 講「経済数学入門」で数多く取り上げている)

次のような 2 変数（x と y）の式（正確には 2 変数関数という）を考える。

$$z = x^2 + y^3$$

この式を**xに関して偏微分するには，もう一方の変数yを定数と考えて「微分」をすればよい**。このとき，y^3 が定数として扱われるので，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{2-1} + \boxed{0} = \underline{2x}$$

となる。また，**yに関して偏微分するには，もう一方の変数xを定数と考えて「微分」をすればよい**。このとき，x^2 が定数として扱われるので，

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{0} + 3y^{3-1} = \underline{3y^2}$$

となる。これで，$z = x^2 + y^3$ を x と y に関して偏微分が出来たということになる。このように，**微分の計算方法と偏微分の計算方法はあまり変わらない**のである。

では，次の偏微分の問題を考える。その前に，微分のルールで

$$y = ax \rightarrow \frac{dy}{dx} = a$$

このようなルールがあったことを思い出そう。（a は定数）

もちろん，

$$y = xa \rightarrow \frac{dy}{dx} = a \quad \cdots ①$$

このように考えても同じである（かけ算はかける順番を逆にしても同じ）。

それでは，この知識を使って次のような 2 変数の式の偏微分を考える。

$$z = xy^2$$

この式を**xに関して偏微分すると，y^2を定数として考える**ので，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$$

となる（①式と同じような状況になっているので，①式とよく見比べてほしい）

また，**yに関して偏微分すると，xを定数として考える**ので，

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y^{2-1} = 2xy$$

となる。

これで偏微分の計算方法のエッセンスは解説したことになるが，次に 5 つの「偏微分の計算例」を挙げておくので，これらも確認しておいてほしい。

© 2020 Shinya Kato

偏微分の計算例 1　　$z = x^3 + y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y^{2-1} = 2y$

偏微分の計算例 2　　$z = x^2 y^3 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{2-1}y^3 = 2xy^3 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 3y^{3-1} = 3x^2y^2$

偏微分の計算例 3　　$z = x^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{2-1} \cdot y = 2xy \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$

偏微分の計算例 4　　$z = 4xy \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 4y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x$

偏微分の計算例 5　　$z = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\left(= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

偏微分の計算例 5 について，どこで計算を止めればといいのかということで悩む人がいるかもしれないが「式がすっきりしていてきれいな形だな」と（主観的に）思うところで止めてもらえればいい。この第 4 講では（限界代替率を計算するときのことを考えて）

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

で止めることにしておくことにする。もちろん，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{や} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

を解答としてもらっても間違いではない。

＜補足５＞ 限界〇〇の種類

経済学では「限界〇〇」という用語がたくさん登場する。経済学で登場する「限界〇〇」という用語を思いつくだけ並べてみると，

［主にミクロ経済学で登場する限界〇〇］

限界効用，限界代替率，限界費用，限界収入，限界生産力，技術的限界代替率，限界利潤，限界便益，限界変形率，限界外部費用，私的限界費用，社会的限界費用，限界削減費用

［主にマクロ経済学で登場する限界〇〇］

限界消費性向，限界貯蓄性向，限界租税性向（限界税率），限界輸入性向，限界効率，限界不効用，限界の ρ（ロー）

＊ アンダーラインはこの問題集でも扱う用語である。

経済学ではこのように数多くの「限界〇〇」が登場する。そして，これら「限界〇〇」には例外なく微分（もしくは，偏微分）が関係しているのである。

© 2020 Shinya Kato

【例題】次の各効用関数における限界効用 MU_x と MU_y を求めなさい。

1.　$U = 3x + y^2$

（解答）

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 3 + 0 = 3,\quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$$

$MU_x =$ 　3　　$, MU_y =$ 　$2y$

2.　$U = 5x^3y^4$

（解答）

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 3 \cdot 5x^{3-1}y^4 = 15x^2y^4,\quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 4 \cdot 5x^3y^{4-1} = 20x^3y^3$$

$MU_x =$ 　$15x^2y^4$　　$, MU_y =$ 　$20x^3y^3$

3.　$U = 2xy$

（解答）

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2y,\quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 2x$$

$MU_x =$ 　$2y$　　$, MU_y =$ 　$2x$

4.　$U = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

（解答）

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}},\quad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

$MU_x =$ 　$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$　　$, MU_y =$ 　$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

＊ ルートを含めない形で答えておこう。

【問題】

(1)　次の各効用関数における限界効用 MU_x と MU_y を求めなさい。

1.　$U = x^4y^3$

$MU_x =$ 　　　　$, MU_y =$

2.　$U = 3x^2y^2$

$MU_x =$ 　　　　$, MU_y =$

3.　$U = xy$

$MU_x =$ 　　　　$, MU_y =$

4.　$U = 4xy^2$

$MU_x =$ 　　　　$, MU_y =$

© 2020 Shinya Kato

5. $U = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

6. $U = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

7. $U = 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

8. $U = 3x + 4y$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

9. $U = x + y$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

10. $U = \sqrt{x} + y$

$MU_x =$ $\qquad\qquad$ $, MU_y =$

(2) 次の文章中の括弧内に入る適切な語句や数値を書きなさい。また，適切な語句を選ぶ場合には，正しい語句に〇を書きなさい。

X 財に関する限界効用 MU_x とは，他の財（Y 財）の消費量を一定としたときに，X 財を追加的に（　　）単位消費することによる（　　　　）の増加分である。また，Y 財に関する限界効用 MU_y とは，他の財，つまり，（　　　）財の消費量を一定としたときに，（　　　）財を追加的に 1 単位消費することによる効用の（　増加　/　減少　）分である。

© 2020 Shinya Kato

(3)　次の各効用関数において，消費量 $x=4$，$y=9$ における限界効用 MU_x と MU_y の値を求めなさい。

1.　$U=xy$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

2.　$U=x^2y$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

3.　$U=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

4.　$U=3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

5.　$U=2x+y$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

6.　$U=2\sqrt{x}+y$

$MU_x=$　　　　, $MU_y=$

© 2020 Shinya Kato

(4) 効用関数が $U = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$（$x$：$X$ 財の消費量，y：Y 財の消費量）であるとき，次の各問いに答えなさい。

1. $x = 1$，$y = 1$ における X 財に関する限界効用 MU_x の値を求めなさい。

$MU_x =$ ______

2. $x = 4$，$y = 1$ における X 財に関する限界効用 MU_x の値を求めなさい。

$MU_x =$ ______

3. $x = 9$，$y = 1$ における X 財に関する限界効用 MU_x の値を求めなさい。

$MU_x =$ ______

4. 1.から 3.より X 財に関する限界効用 MU_x は，X 財の消費量 x の増加に伴って減少していることがわかるが，X 財について成立しているこのような法則を何と言うか。

______

上記の問題(4)について，同様に考えると Y 財についても限界効用逓減の法則は成立している。（より一般的に書くと，効用関数 $U = x^a y^b$ のとき，$0 < a < 1$ であれば，X 財について限界効用逓減の法則が成立し，$0 < b < 1$ であれば，Y 財について限界効用逓減の法則が成立する）

© 2020 Shinya Kato

3. 限界代替率

限界代替率MRS（Marginal：限界の，Rate：比率，Substitution：代替）とは，X財の消費量xが 1 単位増加したときに，元の効用水準に戻るために必要なY財の消費量yの減少分のことである。この説明では分かりにくいと思うので，りんごとみかんの 2 財モデルを使って噛み砕いて書いておくと，限界代替率MRSとは，
「りんごをもう 1 個おかわりすると効用が上がってしまうが，おかわりする前の効用に戻すためには，みかんの食べる量を「何個」減らせば良いのか」
である。（みかんを「3 個」減らせば良いのであれば，$MRS = 3$である）

授業で，前節で学んだ限界効用を用いると 2 財モデルにおける限界代替率MRSは，

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y}$$

と表せることを学んだ（MU_x/MU_y：**限界効用の比**）。この式を用いて限界代替率MRSを計算するには「指数の計算方法」にも慣れていないといけない。

また，限界代替率MRSの特徴として，

「限界代替率$\boldsymbol{MRS}$は，無差別曲線の接線の傾きに$\boldsymbol{-1}$をかけた値」

になることもおさえておこう。

＜補足６＞ X財のY財に対する限界代替率

通常，限界代替率MRSと言ったとき，「X財のY財に対する」限界代替率を表している（このことから，MRSをMRS_{xy}と書くこともある。添え字であるxyは，横軸→縦軸の順だと考えると覚えやすい）。このX財のY財に対する限界代替率とは，横軸をx，縦軸をyとしたときの限界代替率と考えてもらってよいが，正確には次の通りである。

X財のY財に対する限界代替率MRSとは，X財（りんご）の消費量xが 1 単位増加したときに，元の効用水準に戻るために必要なY財（みかん）の消費量yの減少分である。しかし，これではなんとも理解しづらい。よりわかりやすく言い換えた文章を 3 通り用意するので，自分が理解しやすい文章を見つけてほしい。

X財のY財に対する限界代替率MRSとは，

言い換え①「りんごを 1 つ食べるために，みかんを何個まで売ってもいいと考えるか」

言い換え②「（その人にとっての）りんご 1 個分の価値をみかんの個数で表現してみた」

言い換え③「みかん（Y財）で計ったりんご（X財）価値」

例えば，$MRS = 2$とすれば，りんごを 1 つ食べる（買う）ために，みかんを 2 個まで売ってもいいと考えているなどと具体的にイメージするとよい。

© 2020 Shinya Kato

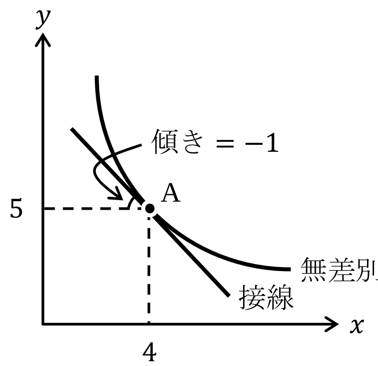
【問題】

(1) 次の文章中の括弧内に入る適切な語句や数値を書きなさい。また，適切な語句を選ぶ場合には，正しい語句に○を書きなさい。

1. 限界代替率 MRS とは，X 財の消費量 x が（　　）単位増加したときに，元の効用水準に戻るために必要な Y 財の消費量 y の減少分のことである。
2. 限界代替率 MRS とは，X 財の消費量 x が 1 単位増加したときに，元の効用水準に戻るために必要な Y 財の消費量 y の（ 増加分 / 減少分 ）のことである。もしくは，X 財の消費量 x が 1 単位（ 増加 / 減少 ）したときに，元の効用水準に戻るために必要な Y 財の消費量 y の増加分と考えてもよい。
3. X 財の消費量 x が 1 単位増加したときに，元の効用水準に戻るために，減らす必要のある Y 財の消費量 y が 3 であるとき，限界代替率 MRS の値は（　　）である。
4. 限界代替率 MRS は，（　　　　　　）の比で表すことができ，X 財，Y 財に関する限界効用 MU_x，MU_y を用いて式で書くと次のようになる。

$$MRS = \left(\qquad\qquad \right)$$

5. 限界代替率 MRS は，無差別曲線の（　　　）の傾きに -1 をかけた値である。
6. 下図の点 A における限界代替率 MRS の値は（　　）である。



7. 同一の無差別曲線上において，X 財の消費量 x が増加すればするほど，限界代替率 MRS が低下していくことを（　　　　　　　　　）の法則といい，これにより無差別曲線が原点に対して（ 凸 / 凹 ）の形状となる。

(2) 次の英単語を 3 回ずつ書きなさい。

限界代替率 MRS　　Marginal Rate of Substitution

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　），
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　），
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

© 2020 Shinya Kato

【例題】効用関数 $U = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$ の限界代替率 MRS を求めなさい。

（解答）

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} \qquad MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}$$

より，

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\boxed{x^{-\frac{1}{2}}}y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\boxed{\boxed{y^{-\frac{1}{3}}}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\boxed{\boxed{y^{\frac{1}{3}}}}}{\frac{2}{3}\cdot 6\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\boxed{x^{\frac{1}{2}}}}}_{\text{この計算に慣れることが大切！}} = \frac{3y^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{4x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{3y^1}{4x^1} = \frac{3y}{4x}$$

⇒ 指数にマイナスが入っていると「分子から分母へ」もしくは「分母から分子へ」移動！

$MRS = \dfrac{3y}{4x}$

【問題】

(1)　次の各効用関数における限界代替率 MRS を求めなさい。

1.　$U = 5x^2y^3$

$MRS =$ ________

2.　$U = xy$

$MRS =$ ________

3.　$U = 2xy$

$MRS =$ ________

© 2020 Shinya Kato

4. $U = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$MRS =$ ______

5. $U = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$MRS =$ ______

6. $U = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}$

$MRS =$ ______

7. $U = 4x + 3y$

$MRS =$ ______

8. $U = \sqrt{x} + y$

$MRS =$ ______

© 2020 Shinya Kato

(2)　次の各効用関数において，消費量 $x = 3$，$y = 2$ における限界代替率 MRS の値を求めなさい。

1.　$U = 4x^2y$

$MRS =$ ＿＿＿＿

2.　$U = 2xy$

$MRS =$ ＿＿＿＿

3.　$U = 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$MRS =$ ＿＿＿＿

4.　$U = 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$

$MRS =$ ＿＿＿＿

ここまで解いてきた人は薄々気付いているかもしれないが…

効用関数を $U = ax^by^c$ とするとき，その限界代替率 MRS は，

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{abx^{b-1}y^c}{acx^by^{c-1}} = \frac{by^cy^{1-c}}{cx^bx^{1-b}} = \frac{by^{c+1-c}}{cx^{b+1-b}} = \frac{by^1}{cx^1} = \frac{by}{cx}$$

となり，効用関数 $U = ax^by^c$ の b や c の値が何であれ，MRS の式の中に $\frac{y}{x}$ が現れ，a の値が何であれ，MRS の式の中には a が現れないことがわかるだろう。

© 2020 Shinya Kato

5.　$U = 3x + y$

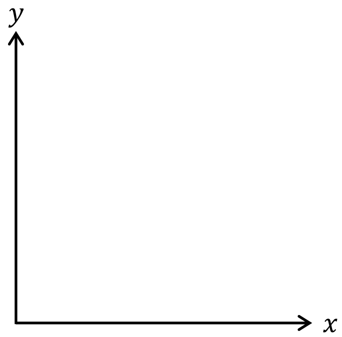
$MRS =$

6.　$U = 3\sqrt{x} + y$

$MRS =$

(3)　効用関数を $U = xy$ とするとき，次の各問いに答えなさい。

1.　効用 $U = 12$ における無差別曲線のグラフを書きなさい。ただし，$x = 2$，$y = 6$ である点 A における接線もグラフ中に明記しなさい。



2.　消費量 $x = 2$，$y = 6$ における限界代替率 MRS の値を求めなさい。

$MRS =$

3.　消費量 $x = 3$，$y = 4$ における限界代替率 MRS の値を求めなさい。

$MRS =$

© 2020 Shinya Kato

4.　消費量 $x = 4$，$y = 3$ における限界代替率 MRS の値を求めなさい。

$MRS =$ ＿＿＿＿＿＿

5.　消費量 $x = 6$，$y = 2$ における限界代替率 MRS の値を求めなさい。

$MRS =$ ＿＿＿＿＿＿

6.　2.から 5.より，1.で書いた無差別曲線上において，X 財の消費量 x が増加すればするほど，限界代替率 MRS が低下していくことがわかるが，このような法則を何と言うか。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

7.　消費量 $y = 6$ における X 財に関する限界効用 MU_x を求めなさい。

$MU_x =$ ＿＿＿＿＿＿

8.　消費量 $y = 2$ における X 財に関する限界効用 MU_x を求めなさい。

$MU_x =$ ＿＿＿＿＿＿

問題(3)の 7.と 8.は，第 4 講の授業動画のスライド 23 に書いた「りんごに飽きている」に関連している。7.を Step2，8.を Step4 に対応させると，確かに，7.から 8.にかけて，X 財（りんご）に関する限界効用 MU_x が低下しているのである。

＜補足７＞ 限界効用の「比」

$$\frac{MU_x}{MU_y}\text{：限界効用の比}$$

限界効用の比の「比」という言葉の使い方に違和感を感じた人もいるのではないだろうか。ちなみに，価格「比」P_x/P_y も，同じ「比」の使い方をしていることに気付くだろう。

私たちは小学生の頃から，比の表し方は「2 : 3」や「5 : 4」と習ってきた。そのため，「比」と聞くと「2 : 3」などを連想してしまうが，経済学で登場する「比」は「比率」のことだと考えた方がよい。そもそも，比は英語で ratio（レシオ），つまり，比率なのである。例えば，$P_x = 3$，$P_y = 10$ としたとき，P_x (= 3) の P_y (= 10) に対する比率（割合）は 30%(= 0.3) だと暗算できると思うが，これが価格比 $P_x/P_y = 3/10 = 0.3$ なのである。

実は，経済学で「価格比」を「価格比率」と呼ぶこともある。そのため，限界効用の比（率）や価格比（率）と考えておけばよいであろう。

＜補足８＞ 効用の考え方（１）

ところで，効用（満足度）が $U=10$ と求められたときに，そもそも効用が 10 とは一体何なのかと不思議に思わなかっただろうか。脳神経科学的に考えて，効用 10 がドーパミンの分泌量と対応付けられているのか…？などと考えた方がいいのだろうか。

経済学はそこまでややこしい話に踏み込むものではない。ある人が「りんごを 1 つ食べること」と「みかんを 1 つ食べること」のどちらが良いかを比べたときに，「りんごを 1 つ食べること」の方が良いと判断したならば,「りんごを 1 つ食べることで得られる効用 $U_{りんご}$」は「みかんを 1 つ食べることで得られる効用 $U_{みかん}$」よりも大きいと解釈するに過ぎないのである。

そこで，$U_{りんご}=10$，$U_{みかん}=5$ というように（無理矢理）数字を当てはめて，$U_{りんご}>U_{みかん}$ だったから「この人はりんごを選んだんだな」と理解し直すのである。

これに関して，経済学の歴史上，論争になった効用の序数性と基数性という話に触れておこう。

まず，歴史的には「効用の基数性」の方が古い考え方だ。**効用の基数性**（**基数的効用**）とは，効用の値自体に意味があるものとする考え方である。先程の $U_{りんご}=10$，$U_{みかん}=5$ の例であれば「りんごはみかんよりも 2 倍の効用が得られている」と解釈する立場である。1900 年代初頭までの（ほとんどの）経済学者は「効用の基数性」を前提に考えていた。

それに対し，**効用の序数性**（**序数的効用**）とは，効用の値にはその大小だけに意味があるとする考え方である。つまり，$U_{りんご}=10$，$U_{みかん}=5$ からは,「りんごを食べた方がみかんを食べて得られる効用よりも高い」としか解釈せず，基数性のように「りんごはみかんよりも 2 倍の効用が得られている」とは考えないという立場である。この立場を採れば，「$U_{りんご}=10$，$U_{みかん}=5$」，「$U_{りんご}=10$，$U_{みかん}=9$」，「$U_{りんご}=100$，$U_{みかん}=1$」はどれも「りんごを食べた方がみかんを食べて得られる効用よりも高い」と言っているに過ぎないのである。

現在のミクロ経済学は「効用の序数性」で効用最大化を説明できるようになっている。つまり, 効用 10 は効用 5 よりも満足度が 2 倍大きいといった (怪しい) 議論をすることなく，効用最大化を説明することができるのである。

ここまで読んで「さっぱり意味がわからない…」と感じる人が大半だと思う。実は，今回の授業の範囲だけで効用の基数性と序数性の違いを説明するには，まだ内容的に不十分である。次回（第 5 講）の**＜補足４＞**「効用の考え方（２）」で説明の続きをすることにしたい。

今回のところは，効用 5 は効用 10 の半分と考えるのが「効用の基数性」で，効用 5 は効用 10 の半分とは考えず，効用 10 の方が「効用が大きい」とだけ考えるのが「効用の序数性」だと理解しておけばいいだろう。

© 2020 Shinya Kato