はじめよう経済学　ー解答編ー
第 5 講　効用最大化

　第 5 講では，消費者行動の終着点である「効用最大化」について学んでいきます。前回，「限界代替率」の求め方を勉強しましたが，ここではそれを用いて「効用最大化条件」を導出していきます。その上で，いよいよ効用最大化問題を解くわけですが，解く方法はいたって簡単です。要は…

「次のような効用最大化条件と予算制約式の連立方程式を解く！」

$$\begin{cases} \dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y} & ：\text{効用最大化条件} \\ P_x x + P_y y = I & ：\text{予算制約式} \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，効用最大化問題を解いたことになるのです。（難しそうな連立方程式に見えますが，実際には数値や式が代入されていて，例えば，

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{1} & ：\text{効用最大化条件} \\ 3x + y = 30 & ：\text{予算制約式} \end{cases}$$

このような連立方程式を解くだけなのです）

＜第 5 講のノーテーション＞

x：X 財の数量（消費量，購入量，需要量）　y：Y 財の数量（消費量，購入量，需要量）

P_x：X 財の価格　P_y：Y 財の価格　I：所得　U：効用

MU_x：X 財に関する限界効用　MU_y：Y 財に関する限界効用

MRS：（X 財の Y 財に対する）限界代替率

目次

＜補足一覧＞　＊ 補足 8, 9, 10 は難易度が高いので飛ばしてもよい。

1．効用最大化条件

授業でも見たように，**効用最大化条件**は，

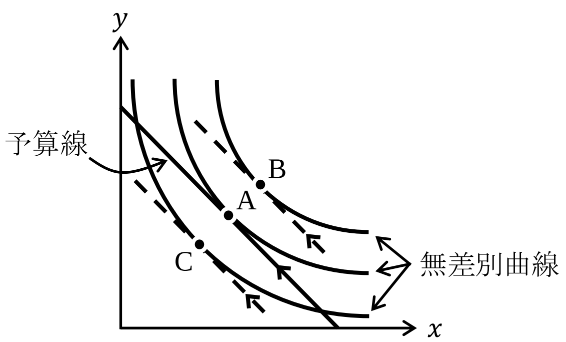
$$(MRS=)\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$$

＊ 両方の分子に x，両方の分母に y なので覚えやすい。

と表すことができた。これは，**「無差別曲線の接線の傾き」と「予算線の傾き」が等しくなっている**，もしくは，**「限界代替率（限界効用の比）」と「価格比（相対価格）」が等しくなっている**という状況を表していた。

また，「効用最大化条件を満たしても効用最大化しているとは限らない」という話も授業で出てきた。これがどういった意味か今一度確認していこう。

下図において，点 A が**最適消費点**（効用が最大となる点）であるが，効用最大化条件を満たしている点は点 A だけだろうか。



実は，**点 A, B, C のいずれの点も効用最大化条件を満たしている**のである。点 A, B, C はどの点も，「無差別曲線の接線の傾き」と「予算線の傾き」が等しくなっているので，効用最大化条件を満たしている。これより，

「効用最大化条件を満たしていても，効用最大化しているとは限らない！」

ことに十分注意をしなければならないのである（これに関して**＜補足８＞**により詳しい説明を書きました）。

【例題】X 財の価格を $P_x=2$，Y 財の価格を $P_y=3$ とするとき，効用関数 $U=x^2y$ における効用最大化条件を求めなさい。

（解答）

$MU_x=\dfrac{\partial U}{\partial x}=2xy$，$MU_y=\dfrac{\partial U}{\partial y}=x^2$ より，$MRS=\dfrac{MU_x}{MU_y}=\dfrac{2xy}{x^2}=\dfrac{2y}{x}$

したがって，

$\dfrac{MU_x}{MU_y}=\dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2}{3}$ が得られる。$\left(\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{3}\right.$ や $y=\dfrac{1}{3}x$ と解答しても構いません$\left.\right)$

$$\underline{\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}}$$

【問題】

(1)　次の文章中の括弧内に入る適切な語句や数値を書きなさい。

1.　次の式を（　　　効用最大化条件　　　）という。

$$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}\quad（もしくは，MRS=\frac{P_x}{P_y}）$$

2.　効用最大化条件とは，（　　無差別曲線　　）の接線の傾きと（　予算線　）の傾きが等しいことである。

3.　無差別曲線の接線の傾き×(−1)が（　　限界代替率　　），もしくは（　　限界効用　　）の比であり，予算線の傾き×(−1)が（　価格比　）であるので，これらが一致することを効用最大化条件という。［補足］無差別曲線の接線の傾きも予算線の傾きもどちらもマイナスの値になるので×(−1)をしてプラスの値に直す。

(2)　次の選択肢のうち，正しいものを2つ選びなさい。

① 効用最大化をしているとき，必ず効用最大化条件を満たしている。　正しい

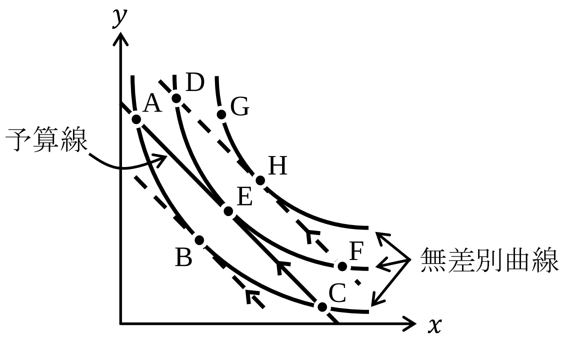
② 効用最大化をしていても，効用最大化条件を満たすとは限らない。　必ず満たす

③ 効用最大化条件を満たしていれば，必ず効用は最大化される。　「必ず」ではない

④ 効用最大化条件を満たしていても，効用が最大化されているとは限らない。　正しい

［補足］②は標準的な無差別曲線と内点解を仮定すれば必ず満たす　　①，④

(3)　以下のグラフに関して，次の各問いに記号A～Hの中から答えなさい。ただし，2本の点線と予算線は平行であるとする。（ヒント）＜補足１＞



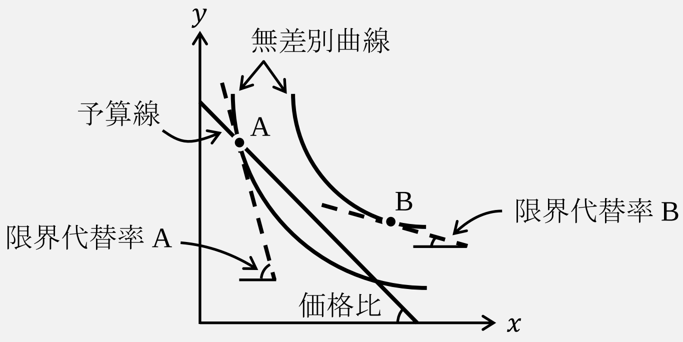
1.　効用最大化条件を満たしている点をすべて答えなさい。　（　B，E，H　）

2.　限界代替率が価格比よりも大きくなる点をすべて答えなさい。　（　A，D，G　）

3.　限界効用の比が価格比よりも小さくなる点をすべて答えなさい。　（　C，F　）

各点において無差別曲線の接線を引いて，その傾き（限界代替率，限界効用の比）と予算線の傾き（価格比）の大小を比較すればよい。

＜補足１＞ 限界代替率≠価格比という状況



上図において，点 A における限界代替率は図中の「限界代替率 A」である。これは予算線の傾きである図中の「価格比」よりも大きい。そのため，点 A においては（予算を使い切ってはいるが）効用最大化条件を満たしていない。

また，点 B における限界代替率は図中の「限界代替率 B」である。これは予算線の傾きである図中の「価格比」よりも小さい。そのため，点 B においては（そもそも買えない上に）効用最大化条件を満たしていない。

(4) X 財，Y 財に関する限界効用を MU_x，MU_y とし，X 財の価格を P_x，Y 財の価格を P_y とするとき，効用最大化条件を書きなさい。

$$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$$

(5) 次の各効用関数における効用最大化条件を求めなさい。

1. $U=xy$

$$MU_x=\frac{\partial U}{\partial x}=y,\quad MU_y=\frac{\partial U}{\partial y}=x \rightarrow MRS=\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{y}{x}$$

$\dfrac{MU_x}{MU_y}=\dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{P_x}{P_y}$

$$\frac{y}{x}=\frac{P_x}{P_y}$$

2. $U=x^3y^2$

$$MU_x=3x^{3-1}y^2=3x^2y^2,\quad MU_y=2x^3y^{2-1}=2x^3y \rightarrow MRS=\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{3x^2y^2}{2x^3y}=\frac{3y}{2x}$$

$\dfrac{MU_x}{MU_y}=\dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{3y}{2x}=\dfrac{P_x}{P_y}$

$$\frac{3y}{2x}=\frac{P_x}{P_y}$$

3.　$U = 3x^2y^2$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2 \cdot 3x^{2-1}y^2}{2 \cdot 3x^2y^{2-1}} = \frac{6xy^2}{6x^2y} = \boxed{\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

$$\underline{\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

4.　$U = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}}_{*} = \frac{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

＊ 指数にマイナスが入っていると「分子から分母へ」もしくは「分母から分子へ」移動！

$$\underline{\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

5.　$U = 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 2x^{\frac{1}{4}-1}y^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}\cdot 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}-1}} = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{2}\cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}} = \frac{x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}}{3x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}} = \frac{y^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{3x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}} = \frac{y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}}{3x^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \boxed{\frac{y}{3x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

$$\underline{\frac{y}{3x} = \frac{P_x}{P_y}}$$

(6)　X 財の価格を $P_x = 1$，Y 財の価格を $P_y = 2$ とするとき，次の各効用関数における効用最大化条件を求めなさい。

1.　$U = 2xy$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2y}{2x} = \boxed{\frac{y}{x} = \frac{1}{2}} = \frac{P_x}{P_y}$$　$\left(y = \frac{1}{2}x \text{ と解答しても構いません}\right)$

$$\underline{\frac{y}{x} = \frac{1}{2}}$$

2.　$U = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}-1}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}} = \frac{y^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \boxed{\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}} = \frac{P_x}{P_y}$$　$\left(\frac{y}{x} = 1 \text{ や } y = x \text{ でも OK}\right)$

$$\underline{\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}}$$

3.　$U = x^{0.4}y^{0.6}$

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{0.4x^{0.4-1}y^{0.6}}{0.6x^{0.4}y^{0.6-1}} = \frac{4x^{-0.6}y^{0.6}}{6x^{0.4}y^{-0.4}} = \frac{2y^{0.6}y^{0.4}}{3x^{0.4}x^{0.6}} = \boxed{\frac{2y}{3x} = \frac{1}{2}} = \frac{P_x}{P_y}$$　$\left(y = \frac{3}{4}x \text{ でも OK}\right)$

$$\underline{\frac{2y}{3x} = \frac{1}{2}}$$

ところで，この第 1 節に関する補足が**＜補足８＞**と**＜補足９＞**であるが，これらは難易度が高いため後ろのページに回している。

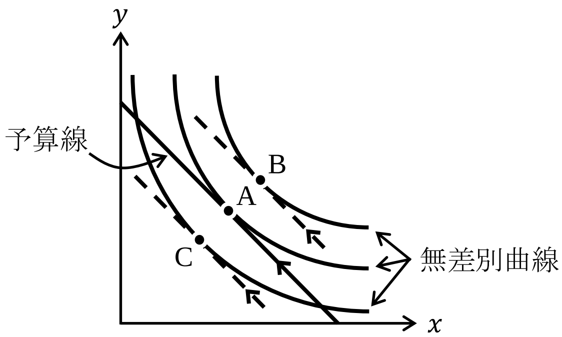
　

2. 効用最大化問題

前節で,

「効用最大化条件を満たしていても，効用最大化しているとは限らない！」

ということを学んだ。これは，下図において効用最大化している点（最適消費点）は点 A であるが，点 A, B, C のすべてが効用最大化条件を満たす点であるということであった。



では，効用最大化条件を満たしつつ，最適消費点である点 A を見つけるにはどうすればいいのだろうか。言い換えてしまえば，上図内の点 A と点 B, C の違いは何なのだろうか。

その違いは，予算線の上に乗っているか乗っていないかで考えるのである。予算線の上に乗っていれば点 A，乗っていなければ点 B, C ということになる。では，予算線の上に乗っているとはどういうことか。それは，**予算線の上に乗っているということは予算制約式を満たしている**ということである。

（どういうことかと言うと…

予算制約式が $10x+5y=100$（$\rightarrow\ 5y=-10x+100\ \rightarrow\ y=-2x+20$）であったとき,

例えば，$x=\underline{\ 6\ }, y=-2\cdot 6+20=\underline{\ 8\ }$ となるような点 D は予算線の上に乗っていて,

その点 D（$x=6, y=8$）は，$\underbrace{10x+5y}_{10\cdot 6+5\cdot 8}=100\ \rightarrow\ 100=100$ というように，予算制約式である $10x+5y=100$ をちゃんと満たしているということです）

そのため，最適消費点である点 A を求めるには,

$$\begin{cases} \text{効用最大化条件} \\ \text{予算制約式} \end{cases}$$

この連立方程式を解けばいいということになる。（連立方程式を解くということは，「効用最大化条件」と「予算制約式」を同時に満たす点を求めるということになりますね）

この連立方程式を数式で表せば,

$$\begin{cases} \dfrac{MU_x}{MU_y}=\dfrac{P_x}{P_y} & \text{：効用最大化条件} \\ P_x x+P_y y=I & \text{：予算制約式} \end{cases}$$

となり，これを解けば x と y の**最適消費量**である x^* と y^* が求まるのである。

【例題】効用関数$U=xy$，$P_x=3$，$P_y=1$，$I=30$であるとき，最適消費量x^*，y^*を求めなさい。

（解答）

効用関数$U=xy$より，

$$MU_x=\frac{\partial U}{\partial x}=y \qquad MU_y=\frac{\partial U}{\partial y}=x$$

であり，$P_x=3$，$P_y=1$であるので，効用最大化条件は，

$$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y} \rightarrow \frac{y}{x}=\frac{3}{1} \quad ：効用最大化条件$$

と求まる。

次に，効用最大化条件と予算制約式の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{1} & ：効用最大化条件 \\ 3x+y=30 & ：予算制約式 \end{cases}$$

この連立方程式を（少し）楽に解くには，ちょっとしたテクニックがある。このテクニックは次の手順で解くことであるので，下の式を左から丁寧に目で追ってほしい。

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{1} \\ 3x+y=30 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{cases} \boxed{3x}=y & \cdots ① \\ \boxed{3x}+y=30 & \cdots ② \end{cases}}_{（*）} \rightarrow y+y=30 \rightarrow 2y=30 \rightarrow y^*=15$$

このテクニックのポイントは，上式の（*）において①式中の$3x$と②式中の$3x$が共通しているので，①式を②式に代入して$y+y=30$を得ているというところである。

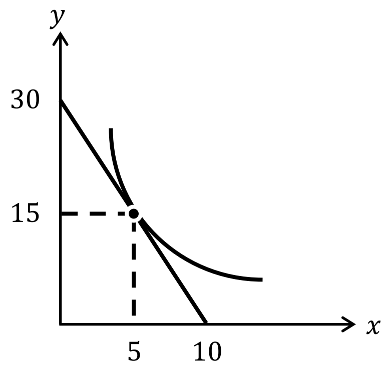
これより得られた$y^*=15$を①式（もしくは②式）に代入すると，

$$3x=15 \rightarrow x^*=5 \quad (3x+15=30 \rightarrow 3x=15 \rightarrow x^*=5)$$

というように，$x^*=5$が得られるのである。

$x^*=$　5　　$, y^*=$　15

この問題の状況を図に書くと次のようになる。



【問題】

(1)　次の効用最大化問題を解きなさい。

1.　$U = xy$，$P_x = 1$，$P_y = 3$，$I = 12$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3}$

$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{3} \\ x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow 3y + 3y = 12 \rightarrow 6y = 12 \rightarrow y^* = 2$

これを $x = 3y$ に代入して，$x^* = 3 \cdot 2 = 6$

$x^* =$ 6 , $y^* =$ 2

2.　$U = x^2y^3$，$P_x = 5$，$P_y = 10$，$I = 100$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{2xy^3}{3x^2y^2} = \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{1}{2} \\ 5x + 10y = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ x + 2y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y \\ x + 2y = 20 \end{cases} \rightarrow \dfrac{4}{3}y + 2y = \dfrac{10}{3}y = 20 \rightarrow y^* = 6$

これを $x = \dfrac{4}{3}y$ に代入して，$x^* = \dfrac{4}{3} \cdot 6 = 8$

$x^* =$ 8 , $y^* =$ 6

3.　$U = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$，$P_x = 4$，$P_y = 5$，$I = 60$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{2y}{x} = \dfrac{4}{5}$

$\begin{cases} \dfrac{2y}{x} = \dfrac{4}{5} \\ 4x + 5y = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x = 10y \\ 4x + 5y = 60 \end{cases} \rightarrow 10y + 5y = 60 \rightarrow 15y = 60 \rightarrow y^* = 4$

これを $4x = 10y$ に代入して，$4x = 10 \cdot 4 = 40 \rightarrow x^* = 10$

$x^* =$ 10 , $y^* =$ 4

4.　$U = x^{0.8}y^{0.2}$，$P_x = 2$，$P_y = 2$，$I = 120$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y}$ より，$\dfrac{0.8x^{-0.2}y^{0.2}}{0.2x^{0.8}y^{-0.8}} = \dfrac{4y}{x} = \dfrac{2}{2} = 1$

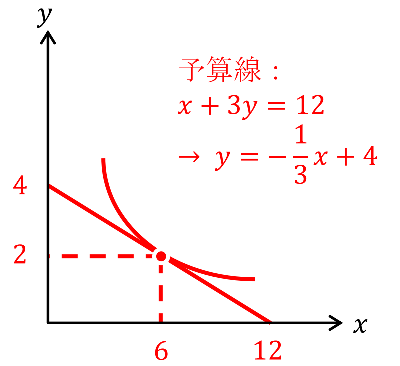
$\begin{cases} \dfrac{4y}{x} = 1 \\ 2x + 2y = 120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 60 \end{cases} \rightarrow 4y + y = 60 \rightarrow 5y = 60 \rightarrow y^* = 12$

これを $x = 4y$ に代入して，$x^* = 4 \cdot 12 = 48$

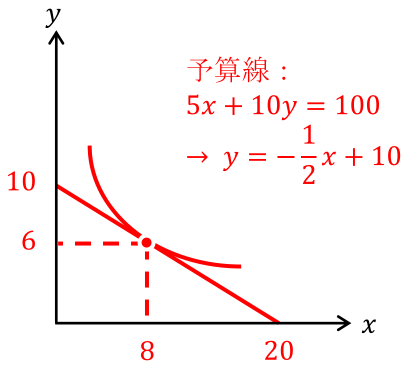
$x^* =$ 48 , $y^* =$ 12

(2) 問題(1)の各小問に関して，最適消費点を通る無差別曲線と予算線をグラフに書き，【例題】で示したように，最適消費点の座標と予算線の x 切片と y 切片の値を書き入れなさい。

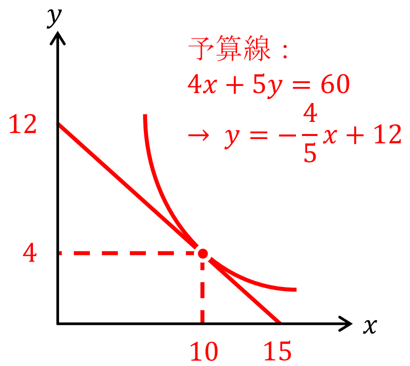
1.



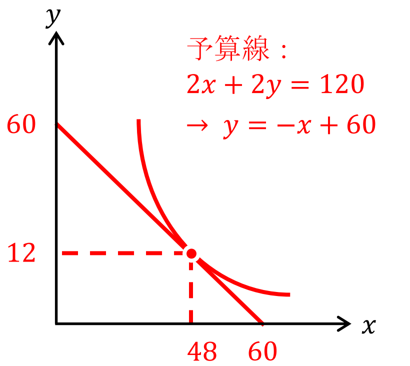
2.



3.



4.



(3) 次の効用最大化問題を解きなさい。

1. $U=x^2y$，$P_x=2$，$P_y=3$，$I=90$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{2xy}{x^2}=\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases}\to\begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases}\to 6y+3y=90\to 9y=90\to y^*=10$$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60\to x^*=30$

$x^*=$ 30 , $y^*=$ 10

2. $U=2x^2y$，$P_x=2$，$P_y=3$，$I=90$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{2\cdot 2xy}{2x^2}=\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases}\to\begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases}\to 6y+3y=90\to 9y=90\to y^*=10$$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60\to x^*=30$

$x^*=$ 30 , $y^*=$ 10

3.　$U=x^4y^2$，$P_x=2$，$P_y=3$，$I=90$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{4x^3y^2}{2x^4y}=\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}$

$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases} \to \begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases} \to 6y+3y=90 \to 9y=90 \to y^*=10$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60 \to x^*=30$

$x^*=$ 30 ，$y^*=$ 10

4.　$U=xy^{\frac{1}{2}}$，$P_x=2$，$P_y=3$，$I=90$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}}}=\frac{y^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\frac{1}{2}x}=\frac{y}{\frac{1}{2}x}=\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}$

$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases} \to \begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases} \to 6y+3y=90 \to 9y=90 \to y^*=10$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60 \to x^*=30$

$x^*=$ 30 ，$y^*=$ 10

5.　$U=x^2y$，$P_x=4$，$P_y=6$，$I=180$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{2xy}{x^2}=\frac{2y}{x}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 4x+6y=180\end{cases} \to \begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases} \to \begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases} \to 6y+3y=90 \to y^*=10$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60 \to x^*=30$

$x^*=$ 30 ，$y^*=$ 10

6.　$U=4x^6y^3$，$P_x=20$，$P_y=30$，$I=900$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

$\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{P_x}{P_y}$ より，$\frac{6\cdot 4x^5y^3}{3\cdot 4x^6y^2}=\frac{2y}{x}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

$\begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 20x+30y=900\end{cases} \to \begin{cases}\frac{2y}{x}=\frac{2}{3}\\ 2x+3y=90\end{cases} \to \begin{cases}2x=6y\\ 2x+3y=90\end{cases} \to 6y+3y=90 \to y^*=10$

これを $2x=6y$ に代入して，$2x=6\cdot 10=60 \to x^*=30$

$x^*=$ 30 ，$y^*=$ 10

問題(3)は，各小問の設定が違うのにも関わらず，すべて同じ答えになっていることに気付いただろうか。このからくりについて，＜**補足２**＞と＜**補足３**＞で説明していく。とても大切な内容なので丁寧に読んでいこう。

＜補足２＞ 実は同じ予算線

問題(3)の各小問の「予算制約式」に着目してみよう。

問題 1.から 6.は $P_x = 2$，$P_y = 3$，$I = 90$ で共通しているので，予算制約式は

$$P_x x + P_y y = I \ \rightarrow \ \boxed{2x + 3y = 90}$$

と書ける。次に，問題 5.は $P_x = 4$，$P_y = 6$，$I = 180$ から

$$P_x x + P_y y = I \ \rightarrow \ 4x + 6y = 180 \ \rightarrow \ \boxed{2x + 3y = 90}$$

と書け，問題 6.は $P_x = 20$，$P_y = 30$，$I = 900$ から

$$P_x x + P_y y = I \ \rightarrow \ 20x + 30y = 900 \ \rightarrow \ \boxed{2x + 3y = 90}$$

と書ける。つまり，問題 1.から 6.の予算制約式はどれも $2x + 3y = 90$ と書くことができ，グラフで書いても同じ予算線になるのである。

次に，問題 1.と問題 5.に着目してみる。これら 2 つの問題を再掲すると，

問題 1.　$U = x^2 y$，$P_x = 2$，$P_y = 3$，$I = 90$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

問題 5.　$U = x^2 y$，$P_x = 4$，$P_y = 6$，$I = 180$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

であり，答えはどちらも $x^* = 30$，$y^* = 10$ で同じであった。

これより，すべて財の価格を 2 倍したとしても所得が 2 倍になっていれば，答えは変わらないということである（第 3 講の**＜補足３＞**でも確認した）。確かに，私たちのお給料が 10 倍になったとしても，商品の価格がすべて 10 倍になったら「何も変わらなさそうだ」ということは直観的にもわかるかと思うが，問題 1.と問題 5.の答えが同じだということは，その直観が正しいことを示しているのである。

＜補足３＞ 効用関数の単調変換

問題(3)の各小問の「効用関数」に着目してみよう。

問題 1.から 6.の効用関数から得られる限界代替率 MRS はすべて

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2}{3}$$

となっている。ここで，問題 1.から 6.の効用関数をすべて並べてみる。（以下の括弧内は，問題 1.の効用関数を基準としたときに，何倍，もしくは何乗したのかを表している）

問題 1.	$U = x^2 y$	（基準）	問題 4.	$U = xy^{\frac{1}{2}}$	（$\frac{1}{2}$乗）
問題 2.	$U = 2x^2 y$	（× 2）	問題 5.	$U = x^2 y$	（問題 1.と同じ）
問題 3.	$U = x^4 y^2$	（2 乗）	問題 6.	$U = 4x^6 y^3$	（× 4 と 3 乗）

これらからわかるように，問題 1.の効用関数 $U = x^2 y$ に対して，x 倍や x 乗したとしても限界代替率は $2/3$ から変化しないというわけである。

この x 倍や x 乗したり作業を**単調変換**と言う。(例えば,「$U=2x^2y$ は $U=x^2y$ を単調変換した効用関数である」と表現する)

単調変換を数学的に定義することは難易度が上がるため,ここでは経済学における単調変換の解釈について説明しておく。

x	1	1	2	2	1	2	3	3	3
y	1	2	1	2	3	3	1	2	3
A　$U=xy$	① 1	② 2	③ 2	④ 4	⑤ 3	⑥ 6	⑦ 3	⑧ 6	⑨ 9
B　$U=2xy$	❶ 2	❷ 4	❸ 4	❹ 8	❺ 6	❻12	❼ 6	❽12	❾18
C　$U=x^2y^2$	㊀ 1	㊁ 4	㊂ 4	㊃16	㊄ 9	㊅36	㊆ 9	㊇36	㊈81
D　$U=xy+5$	Ⅰ 6	Ⅱ 7	Ⅲ 7	Ⅳ 9	Ⅴ 8	Ⅵ11	Ⅶ 8	Ⅷ11	Ⅸ14

まず,上の表の効用関数 A から D はすべて単調変換の関係にあることを念頭に置いた上で,表の見方から説明していく。

表中の①に書かれている「1」は,$x=1$,$y=1$ のとき,$U=xy=1\cdot1=\underline{1}$ であることを表している。②に書かれている「2」は,$x=1$,$y=2$ のとき,$U=xy=1\cdot2=\underline{2}$ であることを表している。

それでは,まず効用関数 A「$U=xy$」にだけ着目し,①～⑨を効用(水準)が小さい順にならべてみると,

① < ② = ③ < ⑤ = ⑦ < ④ < ⑥ = ⑧ < ⑨

となる。同様に,効用関数 B,C,D についても並べてみると,

❶ < ❷ = ❸ < ❺ = ❼ < ❹ < ❻ = ❽ < ❾

㊀ < ㊁ = ㊂ < ㊄ = ㊆ < ㊃ < ㊅ = ㊇ < ㊈

Ⅰ < Ⅱ = Ⅲ < Ⅴ = Ⅶ < Ⅳ < Ⅵ = Ⅷ < Ⅸ

となり,よく見てみると,効用水準の順位がどの効用関数も変わらないことに気付く!

このことから,効用関数を単調変換すると効用水準自体は変わるかもしれないが,その人の好みを変えることがないということである。(好みを変えることがないとは,「$x=2$,$y=1$」と「$x=1$,$y=3$」のどちらが良いかを聞いたときに,常に「$x=1$,$y=3$」が良いと答えるということである)

話が長引いてしまったが,つまり,**効用関数は単調変換しても,限界代替率を変化させないので効用最大化問題の解に影響を与えない**のである。(これが効用の序数性に関係するのですが＜補足4＞で解説します)

この知識を知っていると次のような計算テクニックが使える。これはとても便利なテクニックなので単調変換をよく理解した上で使うと,問題を解く時間を短縮することができる。

【例題】$U = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$，$P_x = 3$，$P_y = 1$，$I = 30$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

（解答）

$U = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ を単調変換して，$V = xy$ とする。(3 乗したことで，効用関数が変更されたので，新しい効用関数を「$V = \cdots$」とした)

$V = xy$ より，限界代替率 MRS は

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{y}{x}$$

となるので，

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{1} & \text{：効用最大化条件} \\ 3x + y = 30 & \text{：予算制約式} \end{cases}$$

を解いて，$x^* = 5$，$y^* = 15$ が得られる。（ちなみに p.7 の【例題】と同じ解答）

$x^* =$ 5 , $y^* =$ 15

この解法では，効用関数を $U = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ のまま，限界代替率 MRS を計算するのは面倒であるので，$V = xy$ に単調変換してから限界代替率 MRS を計算している。このように効用関数を単調変換すると効用最大化問題が簡単に解けるようになるので，知っておくと便利である。

問題(3)を総括すると，問題 1.から 6.は，予算制約式が実質的にはどれも同じものであり，さらに，どの効用関数も問題 1.の効用関数から単調変換をしたものであるので，答えが同じになったというわけである。

＜補足４＞ 効用の考え方（２）

この補足は直前の＜補足３＞と第 4 講の＜補足８＞の続きである。

効用関数を単調変換しても効用最大化問題の解が変わらない，つまり，私たちの消費行動が変わらないとはどういうことであろうか。＜補足３＞でも見たように，効用関数を単調変換すると，効用の値は変わってしまうが，結論である効用最大化問題の解が変わらなかった。これは，**効用の値自体は本質的には重要ではなく，好みの順番が大切である**ということである（ここがわかりにくい人は＜補足３＞を読み直してほしい)。

ここで，前回の＜補足８＞を振り返ってみると，**効用の基数性**（**基数的効用**）とは，効用の値自体に意味があるものとする考え方であり，**効用の序数性**（**序数的効用**）とは，効用の値にはその大小だけに意味があるとする考え方であった。

このことから，私達が学んでいるミクロ経済学は「効用の序数性」に立脚しているということがわかるのである（問題(3)のすべての問題が同じ解答になったことは，効用の序数性を前提にしているということ)。私達が学んでいるミクロ経済学は，「効用関数を単調変換し，効用の値が変わってしまっても，好みの順番は変わっていないので私達は消費行動を変えない」ということから，効用の値自体を重要視しないというスタンスなのである。

（ただし，ゲーム理論や不確実性の内容では，効用の基数性を前提とすることもある）

3. 財の種類

上級財（正常財）：所得 I の増加［減少］により，消費量 x が増加［減少］する財
下級財（劣等財）：所得 I の増加［減少］により，消費量 x が減少［増加］する財
中級財（**中立財**）：所得 I が増加［減少］しても，消費量 x が変化しない財
需要法則を満たす財：価格 P が上昇［下落］すると，消費量 x が減少［増加］する財
⇒ 需要曲線が右下がりになる（つまり，通常の財の性質ですね）
ギッフェン財（超下級財）：価格 P が上昇［下落］すると，消費量 x が増加［減少］する財
⇒ 需要曲線が**右上がり**になる（第１講の**＜補足５＞**を参照）

理解しやすいように，思い切って簡単に説明すると次のようである。

「お給料が増えて買う量を増やせば，上級財」
「お給料が増えて買う量を減らせば，下級財」例：カップラーメン
「お給料が増えても買う量が変わらなければ，中級財」例：トイレットペーパー
「値段が高くなったのに，たくさん買うようになれば，ギッフェン財」

【問題】次の文章中の括弧内に入る適切な語句を書きなさい。
1. 所得 I の増加により，消費量 x が増加する財を（ 上級 ）財という。
2. 所得 I の増加により，消費量 x が減少する財を（ 下級 ）財という。
3. 所得 I の減少により，消費量 x が減少する財を（ 上級 ）財という。
4. 所得 I の減少により，消費量 x が増加する財を（ 下級 ）財という。
5. 所得 I の減少にも関わらず，消費量 x が変化しない財を（ 中級 ）財という。
6. 所得 I の増加にも関わらず，消費量 x が変化しない財を（ 中級 ）財という。
7. 価格 P の上昇により，需要量 x が減少する財を，（ 需要 ）法則を満たす財という。
8. 価格 P の上昇により，需要量 x が増加する財を（ ギッフェン ）財という。
9. 価格 P の下落により，需要量 x が（ 増加 ）する財を，需要法則を満たす財という。
10. 価格 P の（ 下落 ）により，需要量 x が減少する財をギッフェン財という。

＊ ノーテーションにあるように，x は消費量，購入量，需要量のどれで考えてもよい。

＜補足５＞ カップラーメンは下級財？

下級財の例をカップラーメンと書いたが，カップラーメンしか売っていない世界を考えれば，カップラーメンは上級財となる（所得が増えたときに，買うものはカップラーメンしかないからである）。また，途上国ではカップラーメンが非常に重宝されるものかもしれない。つまり，上級財か下級財か（中級財か）という話は，他の財との関わりの中で決まってくるものであり，さらに人の好みによっても異なってくる。そのため「下級財の例はカップラーメンだ」とは断言できるものではないのである。よくインターネットで，上級財の例や下級財の例を挙げているサイトがあるが，このような注意書きは必要であると思う。

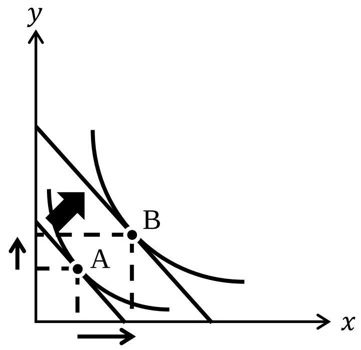
【例題】

(1)　X 財を上級財，Y 財も上級財とするとき，所得 I が増加した場合における，最適消費点の変化について，無差別曲線と予算線を用いた図を書いて示しなさい。ただし，変化前の最適消費点に A，変化後の最適消費点に B と書き入れること。

＊ 以下の【問題】では「X 財：上級財，Y 財：上級財，所得 I：増加」と表記する。

（解答）

次のように作図すればよい。



（解説）

作図の手順は次の通りである。

Step1　元の予算線とそれに接する無差別曲線を書き，最適消費点 A を書き入れる。

Step2　問題文より，所得 I が増加するので，予算線を右上に平行シフトさせる。

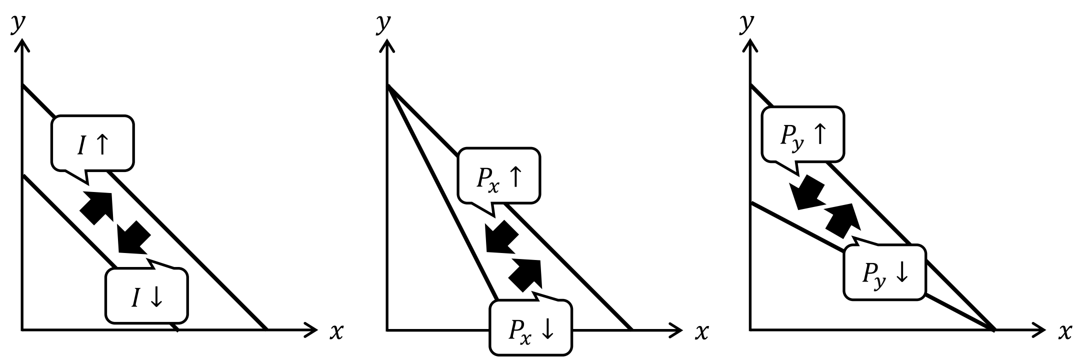
Step3　**X 財も Y 財も上級財であるので，所得 I の増加でどちらの財も消費量が増えなければならない。**

Step4　そのため，新しい最適消費点 B を元の最適消費点 A の右上にくるように新しい予算線の上に書き入れる。

Step5　新しい最適消費点 B を通り，新しい予算線に接するような無差別曲線を書き入れれば完成である。（最適消費点が点 A から点 B に移ることで，X 財の消費量 x と Y 財の消費量 y がともに増加していることがわかる）

この例題では第 3 講で学んだ予算線のシフトが重要になってくる。忘れている人もいるかもしれないので予算線のシフトのまとめを再掲しておく。

［所得 I の変化］　［X 財の価格 P_x の変化］　［Y 財の価格 P_y の変化］

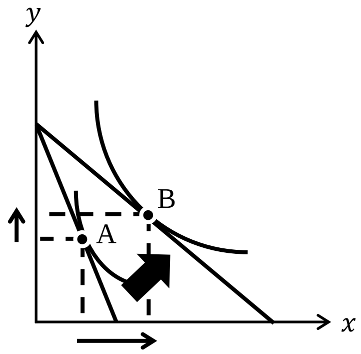


(2)　X 財を需要法則を満たす財とするとき，X 財の価格 P_x が下落した場合における，最適消費点の変化について，無差別曲線と予算線を用いた図を書いて示しなさい。ただし，Y 財の消費量 y は増加するものとして作図し，変化前の最適消費点に A，変化後の最適消費点に B と書き入れること。

＊ 以下，「X 財：需要法則を満たす財，X 財の価格 P_x：下落，Y 財の消費量 y：増加」

（解答）

次のように作図すればよい。



（解説）

作図の手順は次の通りである。

Step1　元の予算線とそれに接する無差別曲線を書き，最適消費点 A を書き入れる。

Step2　問題文より，X 財の価格 P_x が下落するので，予算線を反時計回りに回転させる。

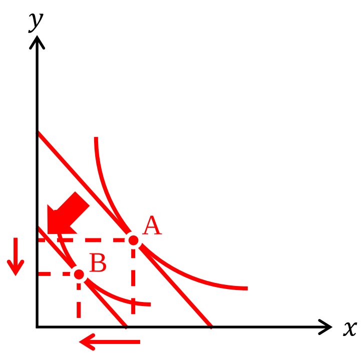
Step3　**X 財は需要法則を満たす財であるので，X 財の価格 P_x が下落に対して需要量 x は増加しなければならない。**

Step4　また，Y 財の消費量 y は増加するものと仮定されているので，新しい最適消費点 B を元の最適消費点 A の右上にくるように新しい予算線の上に書き入れる。

Step5　新しい最適消費点 B を通り，新しい予算線に接するような無差別曲線を書き入れれば完成である。（最適消費点が点 A から点 B に移ることで，X 財の消費量 x と Y 財の消費量 y がともに増加していることがわかる）

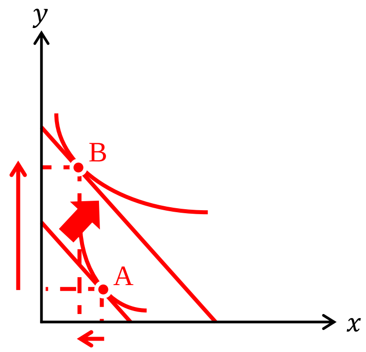
【問題】上の【例題】を参考にして，次の各問いに答えなさい。

1.　X 財：上級財，Y 財：上級財，所得 I：減少　　所得 I↓⇒ 上級財 x↓，上級財 y↓

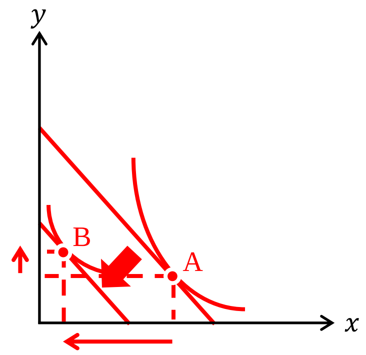


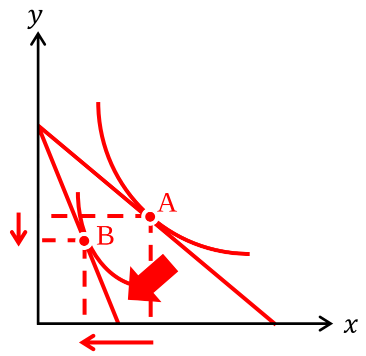
2.　X 財：下級財，Y 財：上級財，<u>所得 I：増加</u>　　所得 $I\uparrow\Rightarrow$ 下級財 $x\downarrow$，上級財 $y\uparrow$



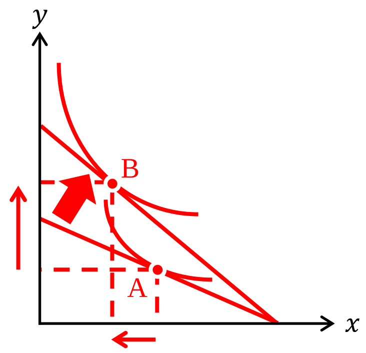
3.　X 財：上級財，Y 財：下級財，<u>所得 I：減少</u>　　所得 $I\downarrow\Rightarrow$ 上級財 $x\downarrow$，下級財 $y\uparrow$



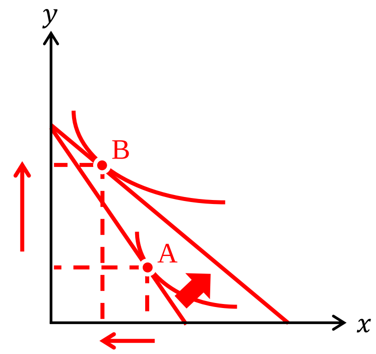
4.　X 財：需要法則を満たす財，<u>X 財の価格 P_x：上昇</u>，Y 財の消費量 y：減少　　$P_x\uparrow\Rightarrow x\downarrow$



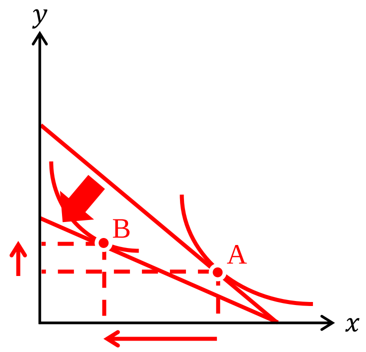
5.　Y 財：需要法則を満たす財，<u>Y 財の価格 P_y：下落</u>，X 財の消費量 x：減少　　$P_y\downarrow\Rightarrow y\uparrow$



6.　X 財：ギッフェン財，X 財の価格 P_x：下落



7.　Y 財：ギッフェン財，Y 財の価格 P_y：上昇



＜補足６＞ 粗代替財と粗補完財

　問題 4.では，X 財の価格 P_x が上昇して Y 財の消費量 y が減少していたが，このような関係にあるとき，Y 財は X 財の **（粗）補完財**という（補完財と書いてもいいが，勉強が進むと，純補完財という概念も出てくるため，混同しないために粗補完財と書いた方がいい）。

　また，問題 5.では，Y 財の価格 P_y が下落して X 財の消費量 x が減少していたが，このような関係にあるとき，X 財は Y 財の **（粗）代替財**という。（同様に，純代替財という概念もあるため，粗代替財と書いた方がいい。また，「代替」は「だいたい」と読むことに注意）

　ところで，第 1 講の授業で「需要曲線のシフトの原因」について代替財や補完財の価格の変化を挙げたことを覚えているだろうか。実は，これらも「粗代替財」，「粗補完財」のことを意味しているのである。粗代替財と粗補完財をまとめておくと次のようになる。

$P_x\downarrow \Rightarrow y\downarrow$ もしくは，$P_x\uparrow \Rightarrow y\uparrow$ のとき，Y 財は X 財の（粗）代替財　… ①
$P_y\downarrow \Rightarrow x\downarrow$ もしくは，$P_y\uparrow \Rightarrow x\uparrow$ のとき，X 財は Y 財の（粗）代替財　… ②
$P_x\downarrow \Rightarrow y\uparrow$ もしくは，$P_x\uparrow \Rightarrow y\downarrow$ のとき，Y 財は X 財の（粗）補完財　… ③
$P_y\downarrow \Rightarrow x\uparrow$ もしくは，$P_y\uparrow \Rightarrow x\downarrow$ のとき，X 財は Y 財の（粗）補完財　… ④

　ところで，①，②を単に「X 財と Y 財は（粗）代替財」，③，④を単に「X 財と Y 財は（粗）補完財」といってしまうことが多い。（4 通りに分けるのは面倒なので 2 通りにしてしまう）

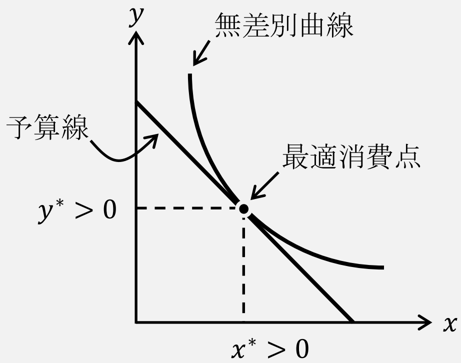
　また，粗代替財に関しては，すべて矢印の向きが同じ（例えば，$P_x\boxed{\downarrow}\Rightarrow y\boxed{\downarrow}$）になるので，「**たいだい（大体；代替），向きは同じ**」と覚えておくと忘れないのではないだろうか。

＜補足７＞ 内点解と端点解

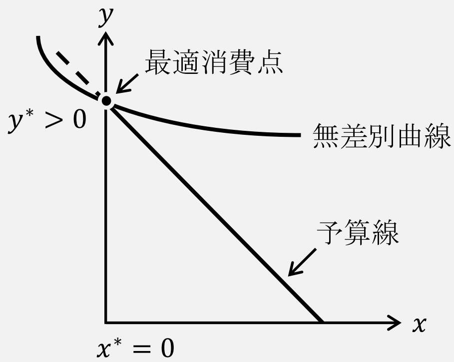
第 3 講の＜補足７＞で，効用最大化問題の解が「りんごとみかんの両方を買う」となることを「内点解となる」もしくは「端点解（コーナー解）がない」と書いた。

内点解とは，最適消費点が $x^* > 0$，$y^* > 0$ となるような解のことをいう。言い換えると，最適消費点が x 軸や y 軸の上にはないということである。それに対して，**端点解**（**コーナー解**）とは，最適消費点が $x^* > 0$，$y^* = 0$，もしくは，$x^* = 0$，$y^* > 0$ となるような解のことをいう。言い換えると，最適消費点が x 軸か y 軸のどちらかの上にあるということである。左下図は内点解，右下図は端点解（コーナー解）の状況を表している。

［内点解］



［端点解（コーナー解）］



端点解（コーナー解）に関して少し補足しておく。まず，右上図の最適消費点は端点解になっており特殊な状況のように思えるが，効用が最大化され，予算を使い切っていることは通常の最適消費点（内点解）と同じ特徴である。しかし，端点解（最適消費点）は無差別曲線と予算線の接点になっていないことには注意が必要である。

また，第 3 講の＜補足７＞で見たように，効用関数が $U = xy$（やその単調変換した式の形）であれば，端点解をもつことはない。なぜなら，$U = xy$ は x か y のどちらかが 0 であれば $U = 0$ となってしまうので，所得が少しでもあるならば X 財と Y 財のどちらも少しは購入しようとするからである。

最後に，端点解となる場合は，

$$\begin{cases} \dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y} & \text{：効用最大化条件} \\ P_x x + P_y y = I & \text{：予算制約式} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて，最適消費点を求めるという解法を使うことができない。なぜなら，端点解においては無差別曲線の接線の傾き（限界代替率）と予算線の傾き（価格比）が一致しないため，効用最大化条件が使えないのである。例えば，右上図における最適消費点（端点解）においては，限界代替率 ＜ 価格比となっており（＜補足１＞も参照），効用最大化条件が満たされていないことがわかる。ちなみに，＜補足１０＞で学ぶラグランジュ未定乗数法も，端点解になる場合には用いることができない。

4. 需要曲線の導出

第 3 講から第 5 講の第 3 節までの知識を使えば，第 1 講で学んだ需要曲線を導出することができる。次のような X 財の価格 P_x の変化を考える。

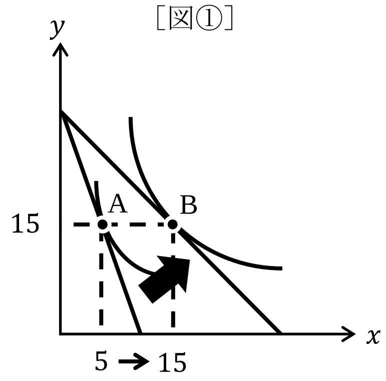
効用関数 $U = xy$，$P_x = 3$，$P_y = 1$，$I = 30$ であるとする（p.7 の【例題】より，$x^* = 5$，$y^* = 15$）。ここで，P_x のみが $P_x = 1$ へ下落したとする。

価格変化**後**の最適消費量 x^*，y^* を求めてみる。

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1} \\ x + y = 30 \end{cases} \rightarrow\ x^* = 15,\ y^* = 15$$

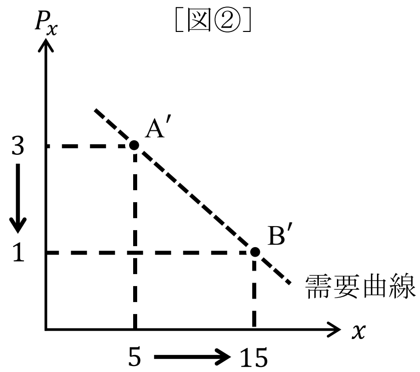
と求めることができる。これを無差別曲線と予算線のグラフで書き表せば，

［図①］



となる。図①は X 財と Y 財の 2 財に注目しているが，X 財のみに注目した図を下に書いてみよう。横軸を X 財の消費量 x とし，縦軸を X 財の価格 P_x としていることに注意しよう。

［図②］



図②の点 A′ は図①の点 A に対応しており，同じように点 B′ は点 B に対応している。（対応しているとは，点 A も点 A′ も $P_x = 3$ のときの最適消費量が $x^* = 5$，点 B も点 B′ も $P_x = 1$ のときの最適消費量が $x^* = 15$ ということである）

そして，図②に需要曲線と書いてあるが，点 A′ と点 B′ を通る曲線（図中の右下がりの点線）が「需要曲線」だということである。このことから，**図①の効用最大化問題から，図②の需要曲線を導くことができる**ことがわかるのである！

（ちなみに，図②で需要曲線を点線で書いている理由は，図①からわかることは図②の点 A′ と点 B′ の 2 点を需要曲線が通るということだけだからである。つまり，需要曲線が点 A′ と点 B′ 以外の箇所はどこを通るかわからないので点線で書いているのである）

【問題】

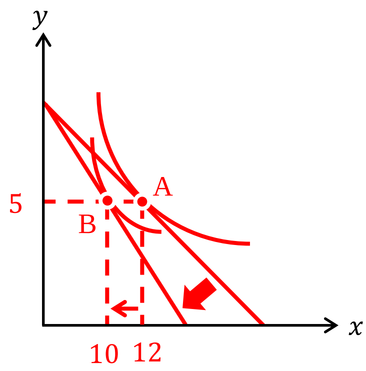
1. $U = x^2 y$，$P_x = 10$，$P_y = 12$，$I = 180$ から，P_x のみが $P_x = 12$ に変化したときの前ページの図①と図②（横軸：x，縦軸：P_x）に対応するグラフを書きなさい。ただし，最適消費点である点 A や点 B の座標や，それに対応する点 A′ と点 B′ の座標を書く必要はあるが，予算線の切片の値や需要曲線は書き入れないでよいものとする。

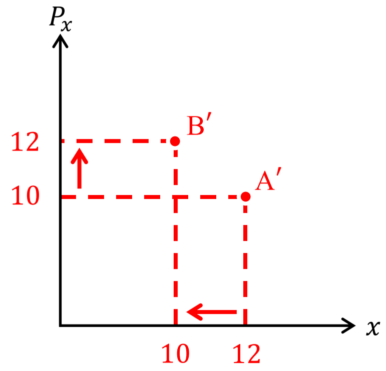
変化前：$\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2} = \dfrac{2y}{x} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6} \\ 10x + 12y = 180 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x = 12y \\ 5x + 6y = 90 \end{cases} \rightarrow 12y + 6y = 18y = 90 \rightarrow y^* = \underline{5}$

$\rightarrow 5x = 12y \rightarrow x^* = \dfrac{12}{5} y^* = \dfrac{12}{5} \cdot 5 = \underline{12}$

変化後：$\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2} = \dfrac{2y}{x} = \dfrac{12}{12} = 1 \\ 12x + 12y = 180 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 15 \end{cases} \rightarrow 2y + y = 3y = 15 \rightarrow y^* = \underline{5}$

$\rightarrow x^* = 2y^* = 2 \cdot 5 = \underline{10}$





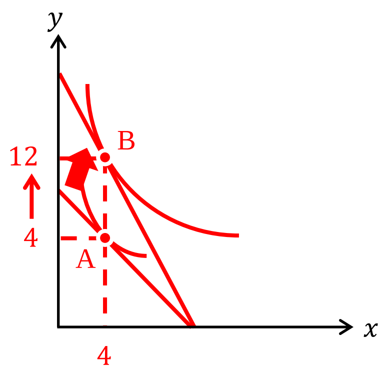
2. $U = x^{0.4} y^{0.6}$，$P_x = 2$，$P_y = 3$，$I = 20$ から，P_y のみが $P_y = 1$ に変化したときの前ページの図①と図②（横軸：$\boxed{y}$，縦軸：$\boxed{P_y}$）に対応するグラフを書きなさい。グラフの書き方は 1.と同様である。

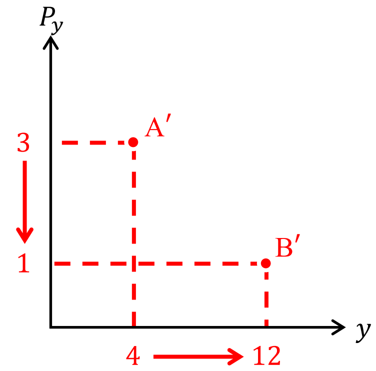
変化前：$\begin{cases} \dfrac{0.4x^{-0.6}y^{0.6}}{0.6x^{0.4}y^{-0.4}} = \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{2}{3} \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 20 \end{cases} \rightarrow 2x + 3x = 5x = 20 \rightarrow x^* = \underline{4}$

$\rightarrow x = y \rightarrow y^* = x^* = \underline{4}$

変化後：$\begin{cases} \dfrac{0.4x^{-0.6}y^{0.6}}{0.6x^{0.4}y^{-0.4}} = \dfrac{2y}{3x} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ 2x + y = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = y \\ 2x + y = 20 \end{cases} \rightarrow 2x + 3x = 5x = 20 \rightarrow x^* = \underline{4}$

$\rightarrow 3x = y \rightarrow y^* = 3x^* = 3 \cdot 4 = \underline{12}$





<補足８> 一階の条件【やや難】

第１節で，「効用最大化条件を満たしていても，効用最大化しているとは限らない」ことを学んだが，これは，

「効用最大化条件を満たす」ことは「効用最大化している」のため**必要条件**　… ①

であると言う。（ただし，端点解であればそもそも効用最大化条件は満たさない**<補足７>**）

①の文章を読んでもさっぱりわからないと思うので，ここから丁寧に説明していくこととする。ところで，必要条件とは高校数学の「論理と集合」という分野で出てくる用語になる。忘れてしまっている人も多いと思うので，簡単に解説をしておこう。

「$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$」と書いたとき，これは，「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$」と読む。ところで「$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$」は正しいことがわかるだろう。なぜなら，$x = 1$ だと，x^2 は１になるからである。このとき，

「$x^2 = 1$」は「$x = 1$」であるための**必要条件**

「$x = 1$」は「$x^2 = 1$」であるための**十分条件**

という。これを書き換えれば，次のようになる。

「$A \Rightarrow B$」が正しい（**真**）のとき，

「B」は「A」であるための**必要条件**

「A」は「B」であるための**十分条件**

ところで，「$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$」は正しくない（**偽**）。なぜなら，$x^2 = 1$ だと，$x = \pm 1$ であるので，「$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$」と書けば正しい（つまり，真である）。このことから，

「$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$」は真

「$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$」は偽

「$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$」は真

とまとめることができる。

さて，ここで話を経済学に戻す。

「効用最大化条件を満たしていても，効用最大化しているとは限らない」

というのは，

「効用最大化条件を満たす ⇒ 効用最大化している」は偽

と書き直すことができる。しかし，次の書き方であれば正しいのではないだろうか。

「効用最大化している ⇒ 効用最大化条件を満たす」は真　… ②

ここで，この②と先程学んだ

「$A \Rightarrow B$」が真のとき，「B」は「A」であるための必要条件

を比較すると，

「効用最大化条件を満たす（B）」ことは「効用最大化している（A）」のため必要条件

と対応しており，①が得られたのである。

しかし，①は文章が長いので，

効用最大化条件は効用最大化のための**必要条件**である。

または，

効用最大化条件は効用最大化のための**一階の条件**（**FOC**）である。

と表現する。一階の条件は FOC（First Order Condition）と書くこともあることから，大学の経済学部の先生は**効用最大化条件（や利潤最大化条件など）を FOC と書く**ことがある。

ところで，「$y = \cdots$」の式を x で 1 回だけ微分することを，一階微分といい，さらにもう 1 回微分する（つまり，2 回微分する）ことを，二階微分という。効用最大化条件が一階の条件と呼ばれる理由は，効用最大化条件が，効用関数 U を x や y で 1 回ずつ（偏）微分した形（限界効用）を用いて表現されているからである。

（前ページで「$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$」というように「⇒」という記号が登場した。この記号には「論理と集合」における「ならば」を意味するというように数学的意味がある。ところで，この問題集の他の部分でも「⇒」や「→」を多用しているが，これらの矢印は話の流れを表しているだけで数学的意味はない）

＜補足９＞ 加重限界効用均等の法則【やや難】

効用最大化条件は，

$$(MRS =)\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{P_x}{P_y}$$

であったが，これを次のように変形する。

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \quad \cdots ①$$

この式を**加重限界効用均等の法則**という。それでは，①式の意味を理解していく。まずは，①式の左辺と右辺の意味をそれぞれ説明する。

$\frac{MU_x}{P_x}$ ：X 財を 1 円分購入したときに増える効用（X 財に関する加重限界効用）

$\frac{MU_y}{P_y}$ ：Y 財を 1 円分購入したときに増える効用（Y 財に関する加重限界効用）

なぜ，このような説明になるのだろうか。

仮に，$MU_x = 20$，$P_x = 5$ とすると，$MU_x = 20$ は X 財 1 つを 5 円で購入したときに増える効用である。これを 5 円で効用 20 だけ増えると考えれば，

$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{20}{5} = 4$：$X$ 財を 1 円分購入したときに増える効用は 4

ということになる。次に，$MU_y = 30$，$P_y = 6$ とすると同様に，

$\frac{MU_y}{P_y} = \frac{30}{6} = 5$：$Y$ 財を 1 円分購入したときに増える効用は 5

となる。

この状況においては，

$$\underbrace{\frac{MU_x}{P_x}}_{=4} < \underbrace{\frac{MU_y}{P_y}}_{=5} \quad \cdots ②$$

となっている。ところで，**②式の状況では効用が最大化されていない**。

なぜなら，**②式の状況において，X 財の購入に使おうと考えていた 1 円を，Y 財の購入に使うことで，さらに効用を上げることができる**からである。

これを理解するために次のような手順で考えていく。

Step1　所得を使い切る購入計画を立てたとする。（例えば，$x = 8$，$y = 6$ だけ買って所得を使い切るぞ！という計画。$x = 8$，$y = 6$ は適当に考えた値なので気にしないこと）

Step2　ここで，X 財の購入に使おうと考えていた 1 円について考える。この 1 円に対して「X 財の 1 円分の購入はやっぱりやめた！」とする。

Step3　そうすると，$\frac{MU_x}{P_x} = 4$ だけ効用が下がる。（なぜなら，$\frac{MU_x}{P_x}$ は X 財を 1 円分購入したときに増える効用であったので，その逆で，X 財の 1 円分の購入をやめたときに減る効用と考えることもできるからである）

Step4　そして，その 1 円を Y 財の購入に回したとする。

Step5　そうすると，$\frac{MU_y}{P_y} = 5$ だけ効用が上がる。（なぜなら，$\frac{MU_y}{P_y}$ は Y 財を 1 円分購入したときに増える効用だからである）

Step6　したがって，X 財の購入に使おうと考えていた 1 円を Y 財の購入に使うことで，**支出額を変えることなく**（所得は使い切ったまま）効用をさらに $1\ (= -4 + 5)$ だけ上げることができた。

この Step6 は，②式の状態では効用が最大化されていなかったことを意味している。なぜなら Step2 と Step4 の作業をすることで，さらに効用を上げることができたということは，元の②式の状態では効用が最大になっていなかったというわけである。

ここまでを踏まえた上で，①式である

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \quad \cdots ①（再掲）$$

を眺め直してみる。この①式が成立している状態だと，X 財に関する加重限界効用と Y 財に関する加重限界効用が等しいので，1 円を X 財から Y 財の購入に変更しようが，Y 財から X 財の購入に変更しようが**「もうこれ以上，効用を上げることが出来ない」＝「効用が最大化されている」**ということになるのである。（ここの太字は，最初は理解しにくいかもしれません。もうこれ以上，効用が上がらないということは，効用が最大になっているから，もうこれ以上，効用が上がらないということですね。例えば，「もうこれ以上食べられない」＝「お腹がいっぱいである」ということに似ているような気がします）

まとめると，①式（加重限界効用均等の法則）が成立している（かつ，予算を使い切る）ならば，効用が最大化されているというわけである。

この「かつ，予算を使い切る」という箇所は Step1 で保証されているわけだが，第 1 節の始めにも書いたように，効用最大化条件（加重限界効用均等の法則）が満たされていても，効用最大化されているとは限らず，予算を使い切るときに効用が最大化されるので，「かつ，予算を使い切る」という箇所は必要なのである。

ちなみに，②式の状態

$$\frac{MU_x}{P_x} < \frac{MU_y}{P_y} \quad \cdots ②（再掲）$$

から 1 円分の$x\downarrow$（X 財の購入量の減少）と $y\uparrow$（Y 財の購入量の増加）を繰り返していけば，効用が上がっていく一方，限界効用に関しては，$MU_x\uparrow$，$MU_y\downarrow$となり（これは限界効用逓減の法則から言えることです。$x\downarrow\Rightarrow MU_x\uparrow$，$y\uparrow\Rightarrow MU_y\downarrow$），

$$\frac{MU_x\uparrow}{P_x} < \frac{MU_y\downarrow}{P_y} \quad \leftarrow \text{左辺と右辺の差は縮まっていく}$$

①式のようにイコールが成立したときに，効用が最大化されているというわけである。

＜補足１０＞ ラグランジュ未定乗数法【やや難】

ここでは，ラグランジュ未定乗数法という（いかにも難しそうな）内容を紹介する。結論を先に書いておくと，効用最大化問題は，

$$\begin{cases} \dfrac{MU_x}{MU_y} = \dfrac{P_x}{P_y} & \text{：効用最大化条件} \\ P_x x + P_y y = I & \text{：予算制約式} \end{cases}$$

この連立方程式を解けば答えが求まるという話であったが，「ラグランジュ未定乗数法という方法を使っても同じ答えが求まりますよ」ということである。そのため，ラグランジュ未定乗数法を知らなくても効用最大化問題を解くのに困ることはないのである。ただ，経済学の本を読んだり，大学の講義を受けていて，ラグランジュ未定乗数法が登場したら困るだろうということで解説を書いておくこととする。

再び，p.7 の【例題】に登場してもらおう。

【例題】効用関数 $U = xy$，$P_x = 3$，$P_y = 1$，$I = 30$ であるとき，最適消費量 x^*，y^* を求めなさい。

ところで，この問題文を次のように書き換えることができることも知っておくとよい。

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} & U = xy \\ \text{s.t.} & 3x + y = 30 \end{cases} \quad \leftarrow \text{「\textbf{制約付き最適化問題}」という。}$$

max は maximize（最大化する）の略であり，s. t. は subject to 〜（〜の制約の下（もと）で）の略である。max の下に x, y が書かれている意味は，「X 財の消費量 x と Y 財の消費量 y を上手く調整して，max の右に書いてある U の値を最大化しなさい」ということである。max の右には最大化することが目的の式である**目的関数**（ここでは効用関数）を書き，s. t. の右には**制約条件**（ここでは予算制約式）を書く。また，s. t. は sub. to と表記することもある。

（ラグランジュ未定乗数法を使った解答）

ラグランジュ関数 L を次のようにおく。

$$L = xy - \lambda(3x + y - 30)$$

ただし，λ（ラムダ）は**ラグランジュ乗数**である。

次に，ラグランジュ関数 L を変数 x，y，λ に関して偏微分して，イコール 0 とする。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 3\lambda = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + y - 30 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②式（$x - \lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda = x$）を①式に代入して，$\lambda$ を消去すると，

$$y - 3\lambda = 0 \ \rightarrow \ y - 3x = 0 \ \rightarrow \ y = 3x \ \rightarrow \ \frac{y}{x} = \frac{3}{1} \text{：効用最大化条件}$$

このように効用最大化条件が得られる。

また，③式より，

$$3x + y - 30 = 0 \ \rightarrow \ 3x + y = 30 \text{：予算制約式}$$

このように予算制約式が得られる。

よって，得られた効用最大化条件と予算制約式を連立すると，$x^* = 5$，$y^* = 15$ を得る。

$x^* = \quad 5 \qquad , y^* = \quad 15$

（解説）

ラグランジュ未定乗数法の手順は次の通り。

Step1　ラグランジュ関数 L を作る。ただし，λ（ラムダ）はラグランジュ乗数である。

$$L = \underbrace{xy}_{\text{効用関数}} - \lambda\underbrace{(3x + y - 30)}_{\text{予算制約式の変形}}$$

（ちなみに，ラグランジュ関数 L は次のどれに設定しても同じ答えが得られる）

$$L = xy - \lambda(3x + y - 30)$$
$$L = xy + \lambda(3x + y - 30)$$
$$L = xy - \lambda(30 - 3x + y)$$
$$L = xy + \lambda(30 - 3x + y)$$

Step2　ラグランジュ関数 L を，x，y，λ でそれぞれ偏微分して 0 とおく。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + y - 30 = 0 \end{cases}$$

Step3　この連立方程式を解けば，効用最大化問題の解が得られる。

そもそも，このようなラグランジュ未定乗数法でなぜ効用最大化問題が解けるのか？また，ラグランジュ乗数λとは何なのか？といった疑問点は残るだろうが，そのようなことを知らなくても Step1－3 の作業を機械的に行うことで答えが得られるのである。もちろん，ラグランジュ関数Lやラグランジュ乗数λにも数学的にも経済学的にも意味がある。しかし，これは経済数学の難易度の高い内容であるので割愛する。詳しく知りたい人は，「経済数学」関連の専門書を読むとよい。

要は，ラグランジュ未定乗数法は道具として使ってしまうことが多く，ラグランジュ未定乗数法の詳しい理論的知識を知らなくても Step1－3 の作業を機械的に行うことで効用最大化問題（や次回から学ぶ利潤最大化問題）を解くことが多いのである。しかし，**＜補足７＞**で見たように端点解がある場合には使えないので，明らかに端点解となることがグラフなどからわかっている場合には，ラグランジュ未定乗数法は使ってはいけない。（さらに上級レベルである**クーン＝タッカー条件**を使えば，端点解も求めることができる）