

はじめよう経済学 — 解答編 —

第7講 利潤最大化

第6講では企業の「費用」について学びました。企業の利潤は（簡単に書くと）

$$\underbrace{\text{利潤}} = \underbrace{\text{売上}} - \underbrace{\text{費用}}$$

第7講 第7講 第6講

* 売上：総収入 TR ，費用：総費用 TC

と表すことができます。第7講は「利潤」最大化について学んでいくこととなりますので、上の式より、前回の内容は今回のための準備だったということがわかります。

今回は、限界費用曲線と利潤最大化条件から供給曲線が導出できることを学んでいきます。第3講から第5講では家計の効用最大化から「需要曲線」を導出しましたが、第6講と第7講では企業の利潤最大化から「供給曲線」を導出することになります。つまり、第1講で学んだ「需要曲線」と「供給曲線」の導出までをきちんと理解するということが、「はじめよう経済学」のミクロ経済学分野の目標となっていたわけです。

今回でミクロ経済学の範囲は終わりですが、もちろん、学問としてのミクロ経済学の範囲はもっと幅広いものです。この授業で扱えたことは氷山の一角に過ぎませんが、それでも「ミクロ経済学の基礎はきちんと学んだ」と自信をもっていいでしょう。

<第7講のノーテーション>

π : 利潤	TR : 総収入	TC : 総費用	MC : 限界費用
AC : 平均費用	VC : 可変費用	FC : 固定費用	$M\pi$: 限界利潤
P : 財の価格	x : 財の数量 (生産量, 産出量, 供給量)		

目次

1. 総収入 TR	2
2. 利潤最大化条件	4
3. 損益分岐点	13
4. 利潤最大化の計算問題	22

<補足一覧>

* 補足 13, 14 は難易度が高いので飛ばしてもよい。

1. 作ったものがすべて売れる?	p.2	8. 生産をいつやめるか?	p.16
2. 限界収入 MR	p.3	9. 単位「円」は「円」でも…	p.21
3. 価格 < 限界費用のときは?	p.6	10. $P = MC$ と $M\pi = 0$ の関係	p.26
4. 限界費用曲線 \equiv 供給曲線 (1)	p.7	11. 損益分岐点を求める計算問題	p.27
5. 限界費用曲線 \equiv 供給曲線 (2)	p.7	12. 生産関数	p.28
6. $P = MC$ の解が2つある場合	p.12	13. 生産要素を含む利潤最大化	p.28
7. 軸に書く変数の省略	p.14	14. 資本のレンタル価格	p.29

1. 総収入 TR

企業の利潤 π は,

$$\text{利潤 } \pi = \text{総収入 } TR - \text{総費用 } TC$$

と表すことができる。(前ページの売上が総収入に対応し、費用が総費用に対応している)

本節では、総収入 TR について学んでいくこととする。

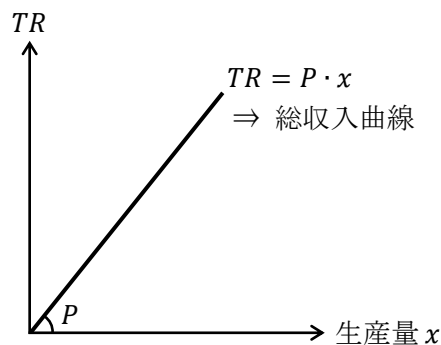
総収入とは、結局は売上高のことであるので、価格 P と売れた個数(生産量) x をかけ算することで求めることができる。(＜補足 1＞を参照)

$$\begin{aligned} \text{総収入 } TR &= \text{価格 } P \times \text{生産量 } x \\ &= P \cdot x \end{aligned}$$

いま、企業はプライステイカーであり、価格 P は市場で決まったものとして考える、つまり、企業にとって価格は $P = 100$ 円 といったような定数として考えるので、

$$TR = \underbrace{P}_{\text{定数}} \cdot x$$

であり、横軸を生産量 x 、縦軸を総収入 TR としたグラフを書くと、



このように、傾きが P となり原点を通る右上がりの直線を書くことができる。(なぜ、このような右上がりの直線になるかは、 $y = 2x$ のグラフが傾き 2 で原点を通る右上がりの直線になることと同じ理由である)

この直線を**総収入曲線**と名付けておこう。直線にも関わらず曲線と名付けるのは、直線の需要曲線を需要「曲線」と言うことと同じである。(授業では扱わないが、独占企業を考えた場合、総収入曲線は曲線となり、文字どおり総収入「曲線」となる)

＜補足 1＞ 作ったものがすべて売れる？

通常、経済学では「生産量＝販売量」としてしまうことが多い。つまり、作ったものはすべて売れると考えているわけだが、このように考えてもいい理由は次の通り。私たちは、第 1 講で均衡価格 P^* において、売れ残りも品不足もない状況が実現することを学んだ。このことから、企業が作ったものを均衡価格 P^* で売っているのであれば、ちょうど売り切ることができるのである。そのため、売れた個数 $x =$ 生産量 x としてもよいのである。

【問題】

(1) 次の文章中の括弧内に入る適切な語句や値を書きなさい。

1. 利潤は次の式で表される。

$$\text{利潤} = (\text{総収入}) - (\text{総費用})$$

2. 総収入は次の式で表される。

$$\text{総収入} = (\text{価格}) \times (\text{生産量})$$

3. 価格 $P = 10$ とする。生産量 $x = 2$ のとき、総収入は $TR = (20)$ となり、生産量 $x = 3$ のとき、総収入は $TR = (30)$ となる。前半： 10×2 、後半： 10×3

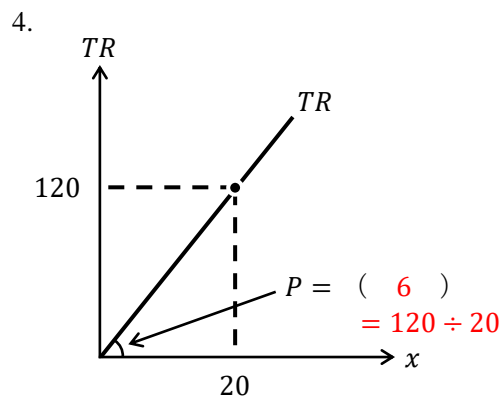
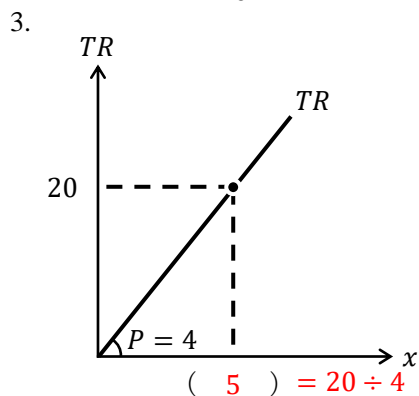
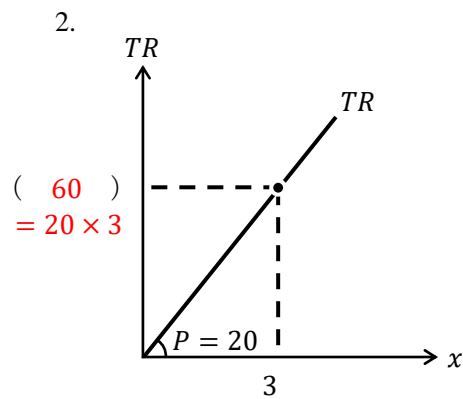
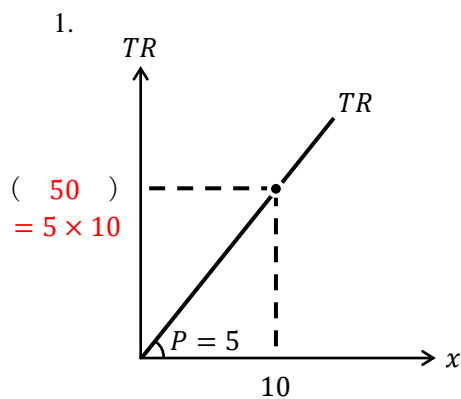
(2) 次の英単語を3回ずつ書きなさい。

総収入 TR

Total Revenue (トータル・レベニュー)

(Total Revenue), (Total Revenue),
(Total Revenue)

(3) 次のグラフの括弧内に入る適切な値を書きなさい。



<補足2> 限界収入 MR

この授業では触れていないが、限界収入 MR (Marginal Revenue ; さらに1つ生産(販売)することで増える総収入) という概念もある。

$$TR = P \cdot x \rightarrow MR = \frac{dTR}{dx} = P$$

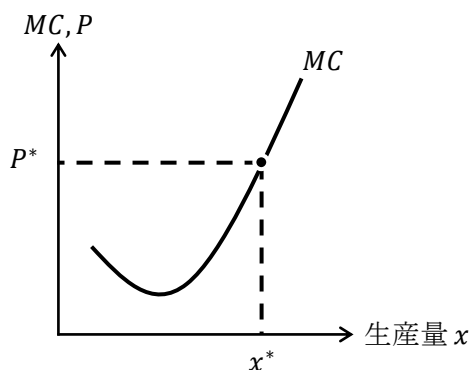
このように、 P を定数とする完全競争市場では、常に $MR = P$ となるため、あえて限界収入という言葉を使わなくても、価格という言葉で説明を済ませることができるのである。

2. 利潤最大化条件

授業で学んだ通り，利潤最大化条件は

$$\text{価格 } P = \text{限界費用 } MC$$

となる。この意味は、「(価格が P^* であるとき,) 企業が $P = MC$ となるような生産量 x^* に決めれば，利潤 π が最大化される」ということである。これをグラフで書けば次のようになる。



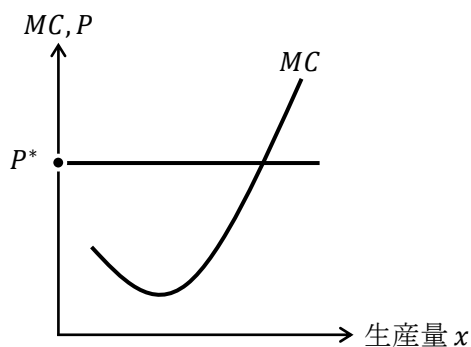
(企業の限界費用曲線が U 字型 (J 字型) であることは，総費用曲線に逆 S 字型を想定しているということであった (第 6 講)。また，限界費用 MC と価格 P の単位は「円」であり，同じ単位なので同じ軸を用いてもよい (第 6 講の <補足 7 >へ))

ここでは，利潤最大化条件の考え方について，授業と同じ手順でより丁寧に解説しておく。

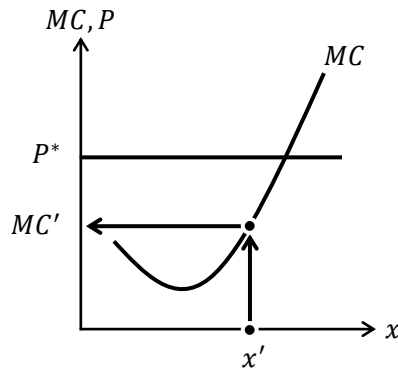
Step1 市場メカニズムによって，需要曲線と供給曲線の交点で価格が P^* に決まる。

Step2 企業はプライステイカーであるので，企業が販売する価格は P^* である。(企業はプライステイカーなので，自社で価格を決めることができないことに注意すること)

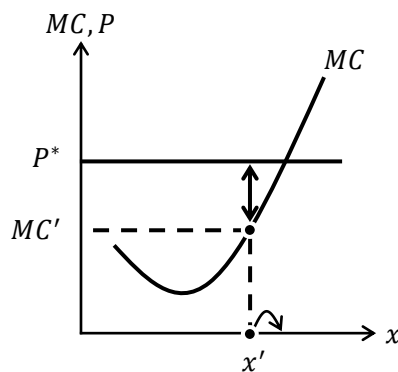
下図には，ある企業の限界費用曲線が書かれており，価格が P^* に決まったという状況を表している。



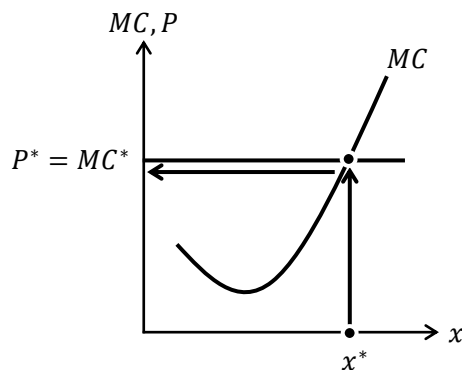
Step3 下図のように企業が生産量を x' に決めたとする。生産量 x' のとき、 $P^* > MC'$ となっており、価格が限界費用よりも高くなっている ($P > MC$)。



この場合、企業は利潤が最大となる生産量を選択できていないことになる。なぜなら、生産量 x' からさらに1つ生産を行う（増産する）ことで、増える費用は MC' であるのに対し、その1つが売れることで増える収入は P^* であるので、増える利潤が $\pi' = P^* - MC'$ （下図の両矢印の長さに対応）となる。利潤が増えたということは、生産量 x' のときに利潤が最大になっていなかったということである。

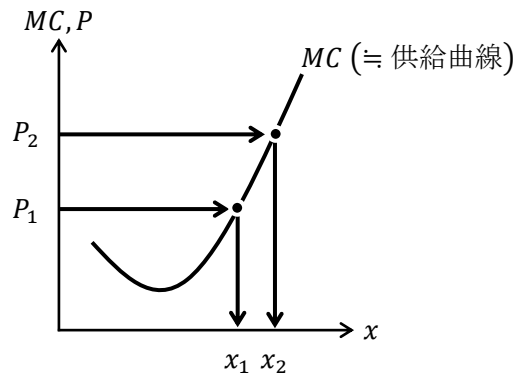


Step4 では、下図のように企業が生産量を x^* に決めた場合はどうだろうか。生産量 x^* のとき、 $P^* = MC^*$ となっており、価格と限界費用が等しくなっている ($P = MC$)。



このとき、企業の利潤が最大となっている。なぜなら、生産量 x^* からさらに1つ生産を増やしたとしても、増える費用 MC^* と増える収入 P^* が等しいため、これ以上、利潤が増えない、つまり、生産量 x^* で利潤が最大だということになる。

Step5 まとめると、価格 P^* が決まれば、利潤が最大となる生産量 x^* が決まる。このことから下図のように、価格 P_1 のとき、利潤が最大となる生産量は x_1 であり、価格 P_2 のとき、利潤が最大となる生産量は x_2 であることがわかる。



ここで、第1講で学んだ供給曲線を思い出してみる。供給曲線とは、ある価格 P に対して、生産量 x がいくつに決まるかを教えてくれる曲線であったが、まさに、限界費用曲線がその役割を果たしているのである。

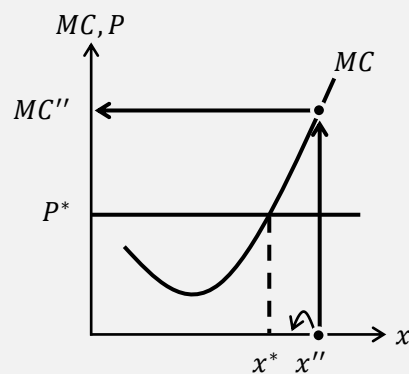
つまり、「供給曲線の正体は、限界費用曲線だった!」というわけである。

(より正確な内容は<補足4>と<補足5>を参照すること)

<補足3> 価格 < 限界費用のときは?

ここまで、価格 $P >$ 限界費用 MC のケースで説明をしてきたが、生産量を作り過ぎていて、価格 $P <$ 限界費用 MC となっているケースではどうだろうか。

この場合は、次回の生産計画を考えるときに、今回作った生産量 x'' から仮に1つ減産してみることを考える。(下図)



そうすると、作る量を減らしたことで商品1つ分の収入 P^* だけ減ってしまう。しかしその一方、作る量を1つ減らしたことで、 MC'' の分だけ生産コストが浮く(節約できる)ことになる。減ってしまう収入 P^* よりも、浮くコスト MC'' の方が大きいので、生産量 x'' から1つ減産した方が儲かるということになる(生産量 x'' の状態から1つ減産することで増える利潤は $MC'' - P^*$ である)。

では、減産によってこれ以上利潤が増えなくなる生産量はどこかかというと、結局は x^* になるのである。したがって、次回、生産する際は生産量を x^* とすれば利潤が最大となる。

<補足4> 限界費用曲線≒供給曲線（1）

総費用曲線の式から供給曲線の式を導出するには、例えば、次のように考える。

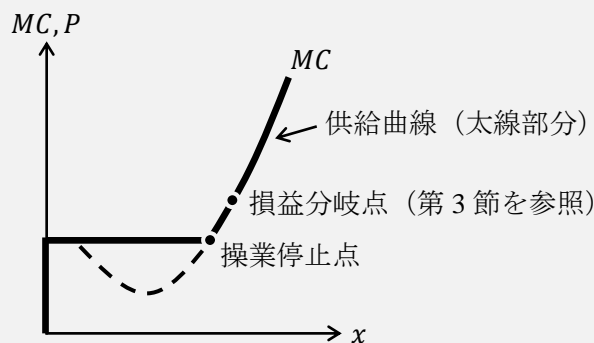
仮に、総費用曲線の式を $TC = x^2$ としたとき、限界費用曲線の式は $MC = 2x$ である。ここで、利潤最大化条件 $P = MC$ を考えると、

$$\text{限界費用曲線の式：} \boxed{MC} = 2x \rightarrow \text{供給曲線の式：} \boxed{P} = 2x$$

が得られるのである。つまり、限界費用曲線に利潤最大化条件を組み合わせることで、供給曲線の式が導出されるのである。そのため、限界費用曲線+利潤最大化条件≒供給曲線と考えた方が感覚的にはより正しい理解である。（ここで、「=」ではなく「≒」を使っている理由は、<補足5>を考慮しているためである）

<補足5> 限界費用曲線≒供給曲線（2）

より正確には、限界費用曲線と（短期）供給曲線の関係は下図のようになり、限界費用曲線と供給曲線はまったく同じではない。この授業では**操業停止点**を扱わないため、詳しい説明はまた別の機会に譲るが、ひとまず、限界費用曲線≒供給曲線と覚えておけばよいだろう。

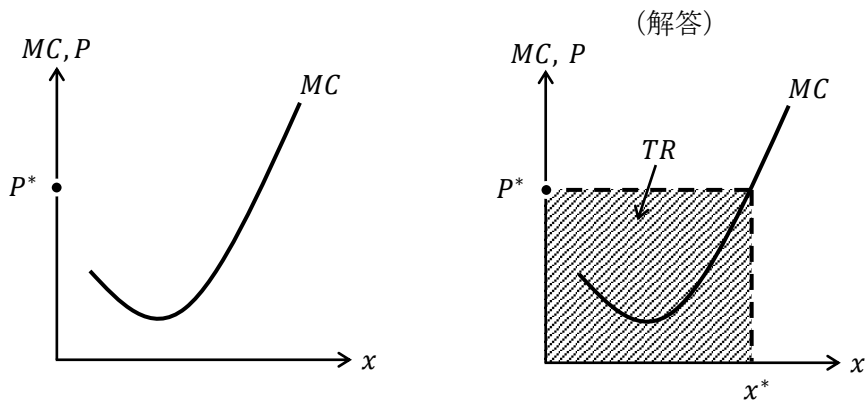


【問題】 次の文章中の括弧内に入る適切な語句、もしくは、数式を書きなさい。また、適切な語句を選ぶ場合には、正しい語句に○を書きなさい。

1. 企業は（ 価格 ） = （ 限界費用 ） となるように生産量を決めることで、（ 利潤 ） を最大化することができる。
2. 価格 = 限界費用 を（ 利潤最大化 ） 条件という。
3. 価格 > 限界費用 であるとき、企業は（ ○増産 / 減産 ） することで、さらに利潤を高めることができる。
4. 価格 < 限界費用 であるとき、企業は（ 増産 / ○減産 ） することで、さらに利潤を高めることができる。（ヒント）<補足3>
5. 完全競争市場において、企業はプライス（ テイカー ） であるので価格を決めることができず、市場メカニズムによって決まった（ ○価格 / 生産量 ） にもとづいて（ 価格 / ○生産量 ） を決める。
6. 利潤最大化条件を加味すると、限界費用曲線の式は（ 供給 ） 曲線の式となる。

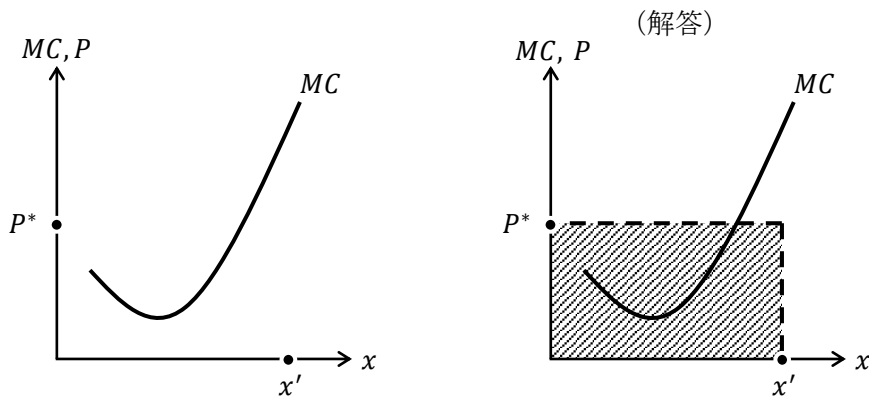
【例題】

1. 左下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総収入 $TR (= P^*x^*)$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



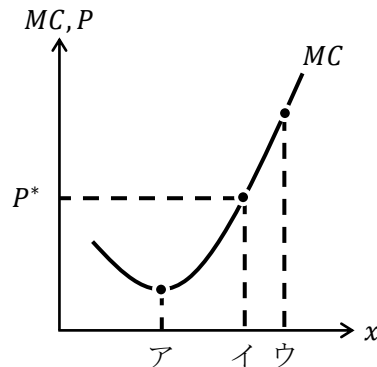
2. 左下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総収入 $TR (= P^*x')$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。

[補足] 生産量 x' では利潤最大化されていない。



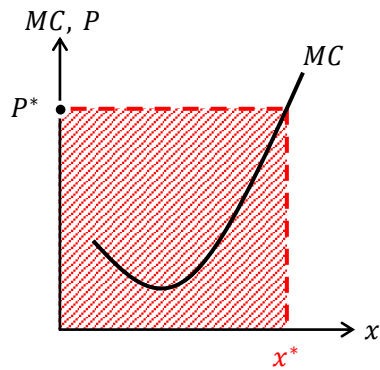
【問題】

1. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x を記号で答えなさい。

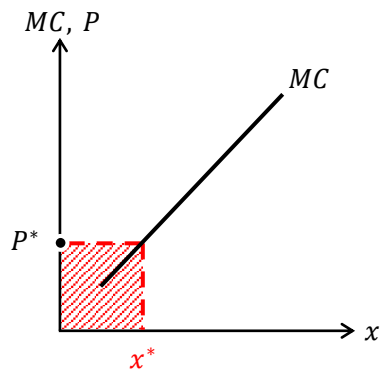


解答： イ

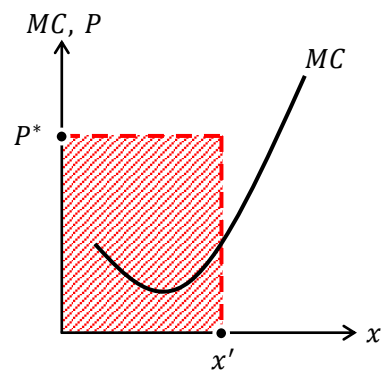
2. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総収入 $TR (= P^*x^*)$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



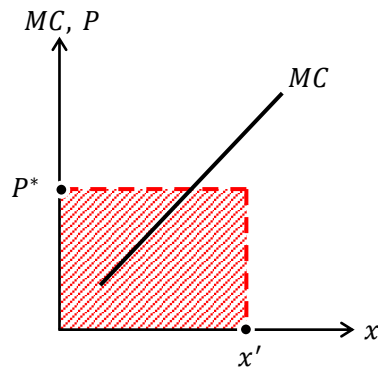
3. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総収入 $TR (= P^*x^*)$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



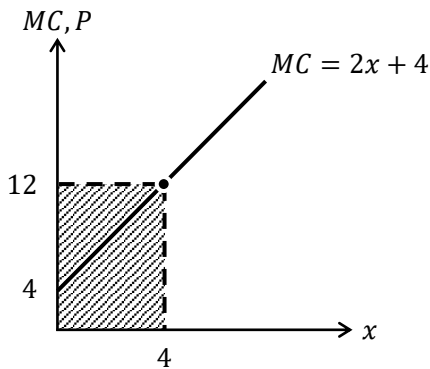
4. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総収入 $TR (= P^*x')$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



5. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総収入 $TR (= P^*x')$ に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



- 【例題】総費用関数が $TC = x^2 + 4x$ で表されるとき、限界費用曲線をグラフで示しなさい。
また、価格が $P = 12$ であるとき、利潤最大化となる生産量における総収入 TR に相当する箇所がわかるように斜線部で示し、総収入 TR の値も求めなさい。



(解答)

$$TC = x^2 + 4x \rightarrow MC = 2x + 4$$

より、限界費用曲線は左図のようになる。

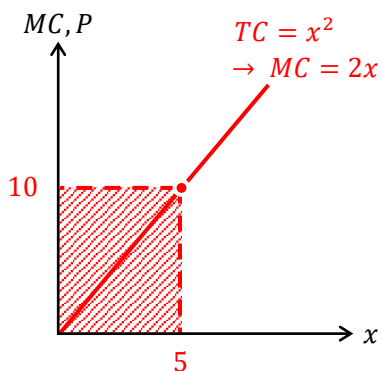
$$\text{また、} P = MC \text{ より、} 12 = 2x + 4 \rightarrow x^* = 4$$

$$\text{よって、} TR = P \cdot x^* = 12 \cdot 4 = 48$$

$$\underline{TR = 48}$$

【問題】

1. 総費用関数が $TC = x^2$ で表されるとき、限界費用曲線をグラフで示しなさい。
また、価格が $P = 10$ であるとき、利潤最大化となる生産量における総収入 TR に相当する箇所がわかるように斜線部で示し、総収入 TR の値も求めなさい。

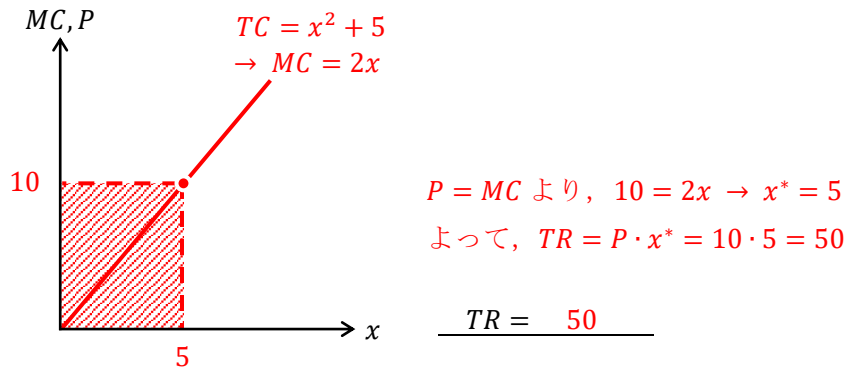


$$P = MC \text{ より、} 10 = 2x \rightarrow x^* = 5$$

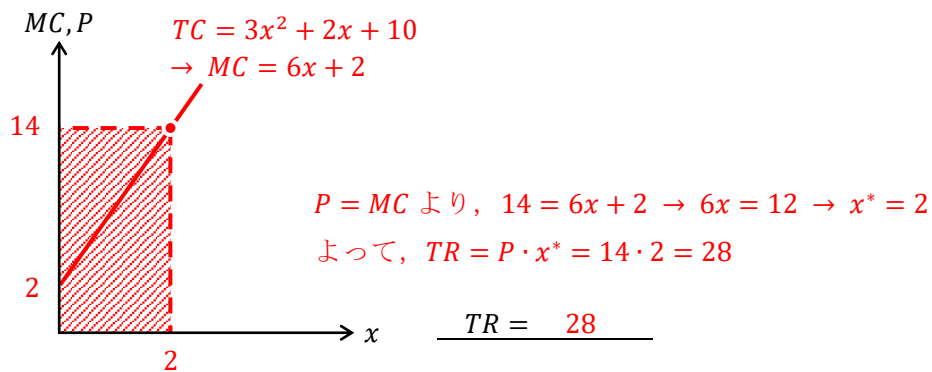
$$\text{よって、} TR = P \cdot x^* = 10 \cdot 5 = 50$$

$$\underline{TR = 50}$$

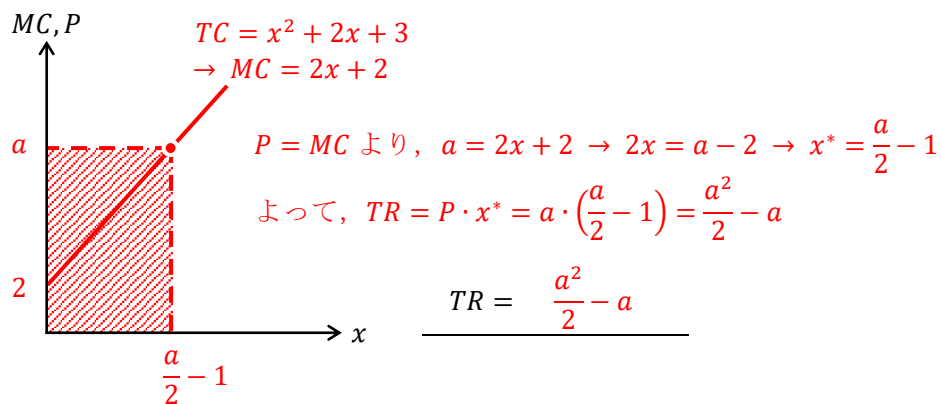
2. 総費用関数が $TC = x^2 + 5$ で表される時、限界費用曲線をグラフで示しなさい。
 また、価格が $P = 10$ である時、利潤最大化となる生産量における総収入 TR に相当する箇所がわかるように斜線部で示し、総収入 TR の値も求めなさい。



3. 総費用関数が $TC = 3x^2 + 2x + 10$ で表される時、限界費用曲線をグラフで示しなさい。
 また、価格が $P = 14$ である時、利潤最大化となる生産量における総収入 TR に相当する箇所がわかるように斜線部で示し、総収入 TR の値も求めなさい。



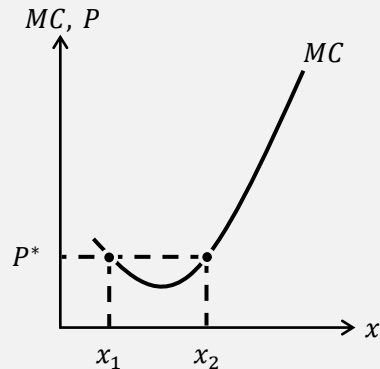
4. 総費用関数が $TC = x^2 + 2x + 3$ で表される時、限界費用曲線をグラフで示しなさい。
 また、価格が $P = a$ である時 ($a > 2$)、利潤最大化となる生産量における総収入 TR に相当する箇所がわかるように斜線部で示し、総収入 TR の値も求めなさい。
 (ヒント) 解答の TR は a が含まれた式となる。



問題 1. と 2. の解答を見比べることで、 $TC = x^2 + 5$ の固定費用 $FC = 5$ は利潤最大化条件に影響せず (微分すると FC は消える)、総収入 TR にも影響しないことがわかる。

<補足6> $P = MC$ の解が2つある場合

ここまで問題を解いてきた人の中には、下図のような状況だと、利潤が最大となる生産量は x_1 と x_2 のどちらになるのだろうかと疑問をもった人はいないだろうか。



結論を先に言っておくと、利潤が最大となる生産量は x_2 であり、 x_1 は利潤が「最小」になる生産量である。この理由を説明するために、第6講の<補足9>で登場した逆S字型の総費用関数 $TC = x^3 - 15x^2 + 76x + 20$ に登場してもらおう。

$$TC = x^3 - 15x^2 + 76x + 20 \rightarrow MC = 3x^2 - 30x + 76$$

ここで、価格を $P = 28$ とする。このとき、利潤最大化条件 $P = MC$ より、

$$\begin{aligned} P = MC &\rightarrow 28 = 3x^2 - 30x + 76 \rightarrow -3x^2 + 30x - 48 = 0 \\ &\rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 8) = 0 \end{aligned}$$

よって、 $x = 2, 8$ が得られる。(因数分解については、第0講の<補足8>を参照)

このように、 $P = MC$ の解が2つ得られたことが、上図の状況に対応しており、 $x_1 = 2$ 、 $x_2 = 8$ という対応関係になっている。ここで、次のように $x_1 = 2$ のときの利潤と、 $x_2 = 8$ のときの利潤を求めてみると、 x_2 における利潤 π_2 の方が大きいことがわかる。

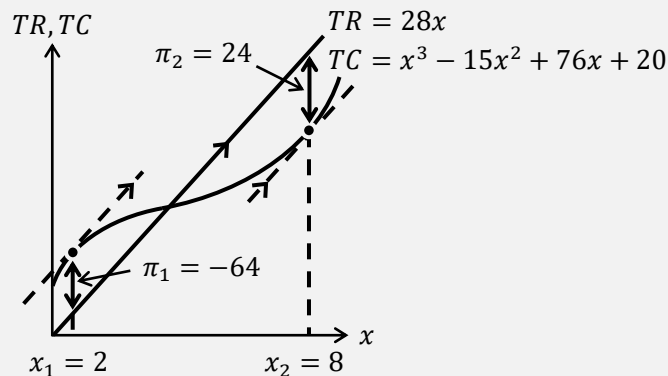
・ $x_1 = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \pi_1 &= TR_1 - TC_1 = P \cdot x_1 - (x_1^3 - 15x_1^2 + 76x_1 + 20) = 28x_1 - x_1^3 + 15x_1^2 - 76x_1 - 20 \\ &= -x_1^3 + 15x_1^2 - 48x_1 - 20 = -2^3 + 15 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 - 20 = -8 + 60 - 96 - 20 = -64 \end{aligned}$$

・ $x_2 = 8$ のとき

$$\begin{aligned} \pi_2 &= TR_2 - TC_2 = P \cdot x_2 - (x_2^3 - 15x_2^2 + 76x_2 + 20) = 28x_2 - x_2^3 + 15x_2^2 - 76x_2 - 20 \\ &= -x_2^3 + 15x_2^2 - 48x_2 - 20 = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 - 20 = -512 + 960 - 384 - 20 = 24 \end{aligned}$$

また、下図から π_2 が最大で π_1 が最小であることもわかる。



3. 損益分岐点

前節まで、利潤が最大となる生産量 x を求めたり、総収入 TR を求めたりしたが、企業の利潤 π の値を求めていないことに気付いていただろうか。実は前節までの内容だと利潤 π の値を求めることができない。なぜなら、

$$\text{利潤 } \pi = \text{総収入 } TR - \underbrace{\text{総費用 } TC}_{\text{本節}}$$

総費用 TC が登場していなかったからである。

それではここから総費用 TC を登場させることにしよう。

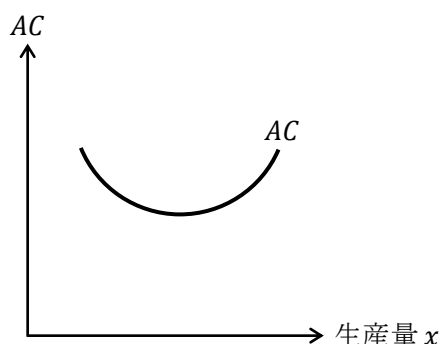
$$\text{平均費用 } AC = \frac{TC}{x}$$

この式は前回学んだ平均費用の式である。また、この式から総費用 TC は、

$$TC = AC \cdot x \quad \cdots \text{①}$$

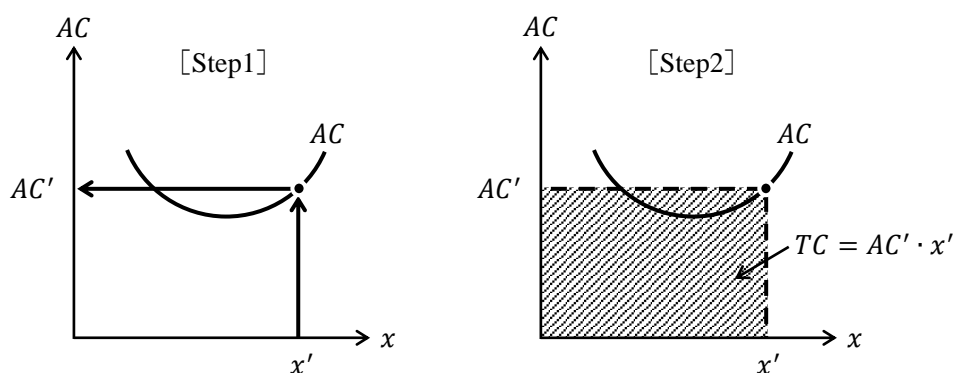
と書けることにも注意をしておこう。

さらに、平均費用曲線は下図のように U 字型で書くことができた。



この図を次のように使うことにしよう。

企業が生産量を x' に決めたとする。このとき、左下図 (Step1) のように平均費用曲線から生産量が x' のときの平均費用は AC' であることがわかる。

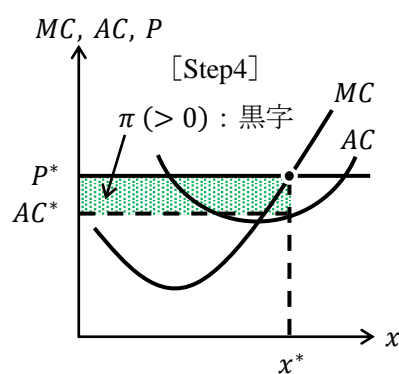
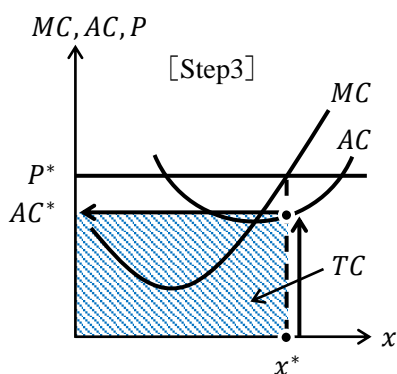
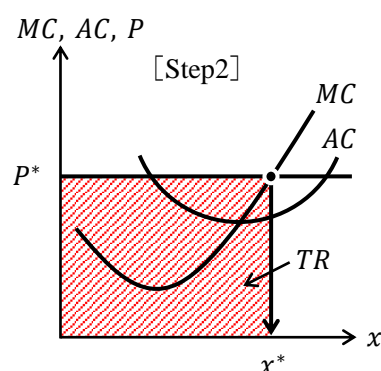
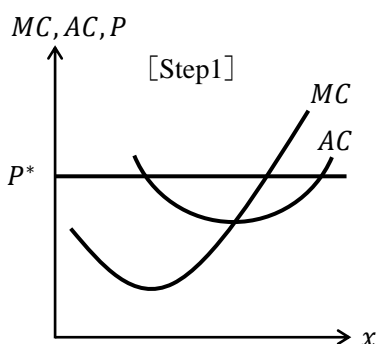


次に、右上図 (Step2) からそのときの総費用 TC は、①式から $TC = AC' \cdot x'$ と計算することができることから、斜線部の面積が総費用 TC の値を表すことがわかる。

(1) 利潤 $\pi > 0$ (黒字) のとき

それでは、前節の内容と前ページの内容を組み合わせる。下図を Step1 から Step4 の手順で説明していく。

- Step1 市場メカニズムで価格が P^* に決まる。
- Step2 利潤を最大化するように企業が生産量を x^* に決める。すると、総収入が $TR = P^* \cdot x^*$ と決まり、斜線部の面積が総収入 TR の値に対応する。
- Step3 生産量が x^* のとき、平均費用は AC^* となる。すると、総費用が $TC = AC^* \cdot x^*$ と決まり、斜線部の面積が総費用 TC の値に対応する。
- Step4 Step2 で求めた総収入 TR から、Step3 で求めた総費用 TC を引くと、この企業の利潤 π が決まり、ドット柄の面積が利潤 π の値に対応する。



このように、平均費用曲線も加えて考えることで、総費用 TC の値が求まり、利潤 π の値が求まるのである。第2節では、平均費用曲線を考えていなかったため、総収入 TR の値までしか求まらず、利潤 π の値まで求まっていなかったことに注意してほしい。

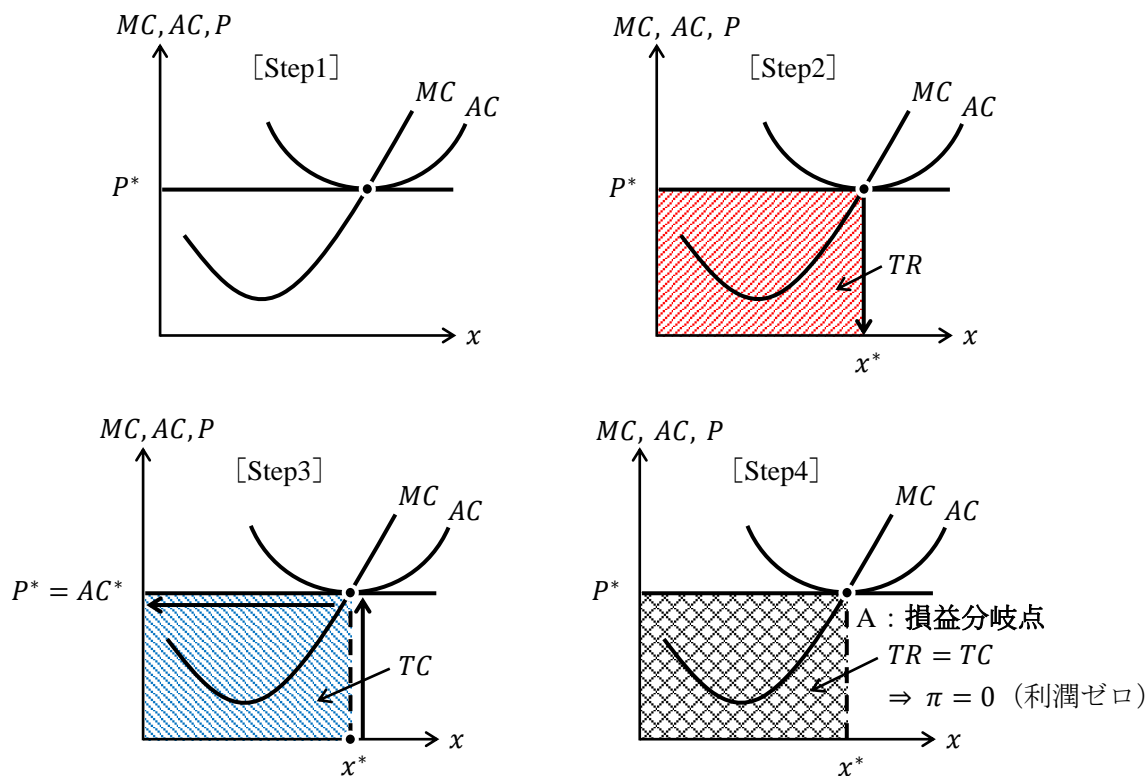
<補足7> 軸に書く変数の省略

このページのグラフの縦軸には「 MC, AC, P 」と3種類の変数が書かれている。このように並べて書くことが正確ではあるが、 MC と AC は省略してしまって「 P 」の1種類としてしまうことが多い。(授業でも縦軸は「 P 」の1種類と省略しましたね)

(2) 利潤 $\pi = 0$ (利潤ゼロ) のとき：損益分岐点のケース

ここでは、企業が利潤最大化をしても(利潤最大化条件 $P = MC$ に基づいて生産量を決めても)利潤が $\pi = 0$ (利潤ゼロ) になるケースについて見ていく。以下の Step1–Step3 は前ページとまったく同じ説明文であるが、図は異なっていることに注意してほしい。

- Step1 市場メカニズムで価格が P^* に決まる。
- Step2 利潤を最大化するように企業が生産量を x^* に決める。すると、総収入が $TR = P^* \cdot x^*$ と決まり、斜線部の面積が総収入 TR の値に対応する。
- Step3 生産量が x^* のとき、平均費用は AC^* となる。すると、総費用が $TC = AC^* \cdot x^*$ と決まり、斜線部の面積が総費用 TC の値に対応する。
- Step4 Step2 で求めた総収入 TR から、Step3 で求めた総費用 TC を引くと、ちょうど両者の面積が相殺され、この企業の利潤は $\pi = 0$ (利潤ゼロ) となる。このことから、限界費用曲線と平均費用曲線の交点である点 A を**損益分岐点**という。



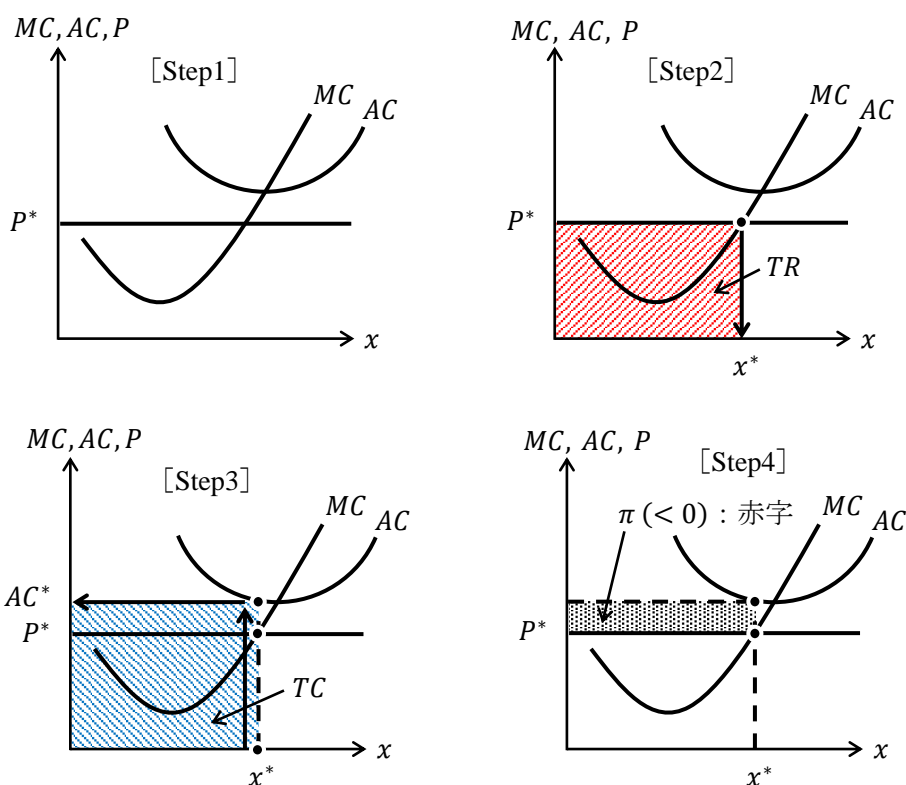
企業の利潤が $\pi = 0$ になってしまうケースを見てきたが、勘違いしてはいけないのは、この企業は経営を怠ったから、利潤がゼロになってしまったわけではない。「この企業が販売する商品の価格が低かったから、利潤最大化をしても最大の利潤がゼロであった」と解釈すべきなのである。

また、以上の議論から、損益分岐点よりも高い価格だと黒字 ($\pi > 0$) になり、損益分岐点を実現する価格だと利潤ゼロ ($\pi = 0$) になることがわかる。次のページでは、損益分岐点よりも低い価格で赤字 ($\pi < 0$) になるケースを取り上げる。

(3) 利潤 $\pi < 0$ (赤字) のとき

ここでは、企業が利潤最大化をしても利潤が $\pi < 0$ (赤字) になるケースについて見ていく。以下の Step1–Step3 はこれまでと同じ説明文であるため省略する。

Step4 Step2 で求めた総収入 TR から、Step3 で求めた総費用 TC を引くと、総費用 TC の面積の方が大きいため、その差であるドット柄の面積がこの企業の利潤の赤字額 ($\pi < 0$) を表していることになる。



ここでも、企業が経営を怠ったから利潤が赤字になってしまったわけではない。「この企業が販売する商品の価格が低かったから、利潤最大化をしても最大の利潤が赤字となってしまった」と解釈すべきなのである。

<補足8> 生産をいつやめるか？

(3) 「利潤 $\pi < 0$ (赤字) のとき」の説明で、この企業は利潤を最大にしても赤字がでてしまうことを学んだ。赤字になるのなら生産をやめて ($x = 0$) しまえばいいじゃないか？と思うかもしれない。ここで、仮に生産をやめる ($x = 0$) とする。すると、

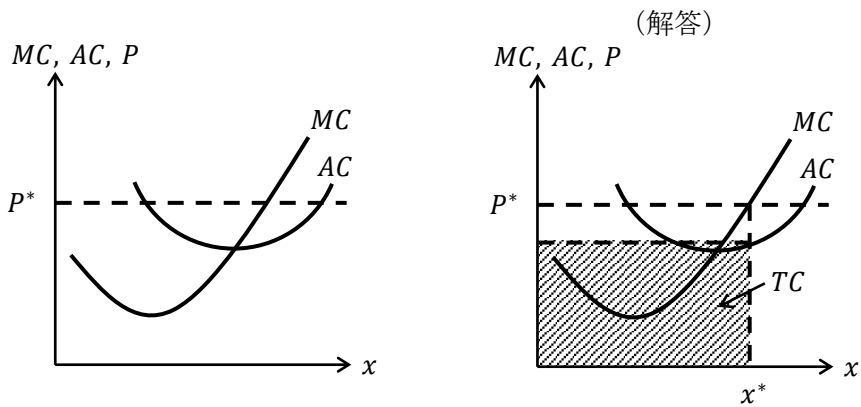
$$\pi = TR - TC = P \cdot x - (VC + FC) = P \cdot 0 - (0 + FC) = 0 - FC = -FC : \text{赤字}$$

* 生産量に伴って変化する可変費用 VC は $x = 0$ だと $VC = 0$ である。

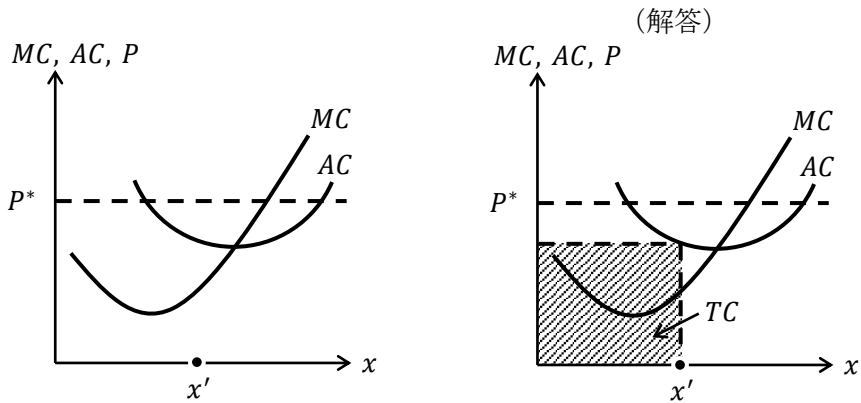
このように生産を止めた途端、固定費用 FC 分の赤字が発生することになってしまう。このことから、固定費用ほど大きくない赤字であれば、企業は無理して生産を続けることになるのである。そして、赤字が固定費用を超えたときに生産をやめるのである。この内容は <補足5> の操業停止点に関する話なので、詳細は別の機会に譲ることにする。

【例題】

1. 左下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



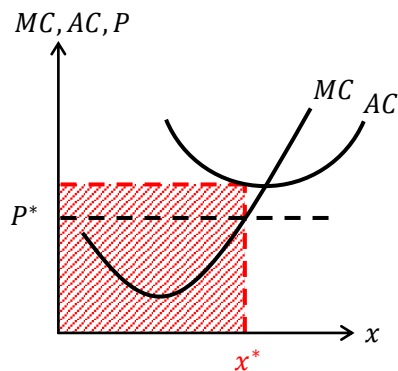
2. 左下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



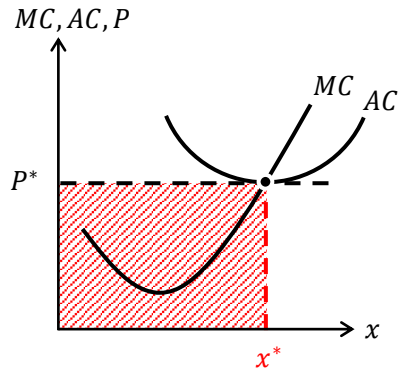
* 2.では P^* が解答に影響しないことに注意。

【問題】

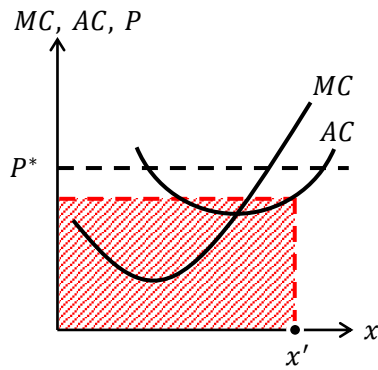
1. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



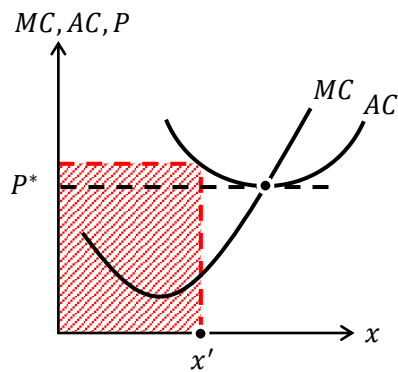
2. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



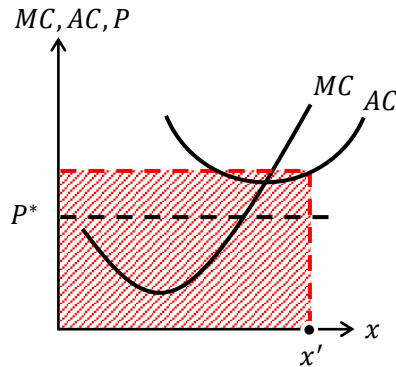
3. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



4. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。

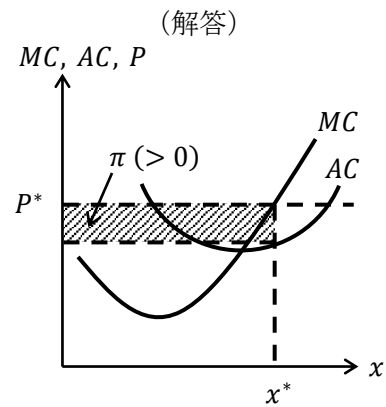
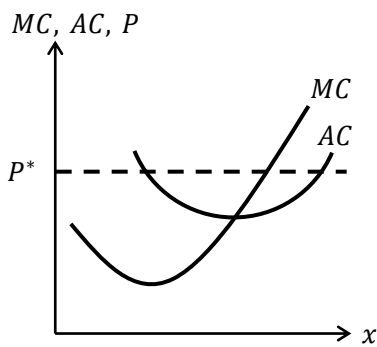


5. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における総費用 TC に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。

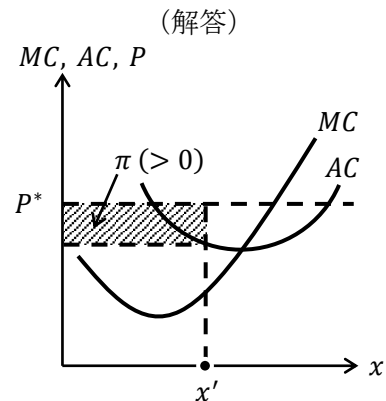
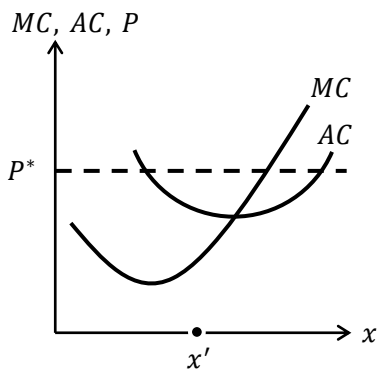


【例題】

1. 左下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



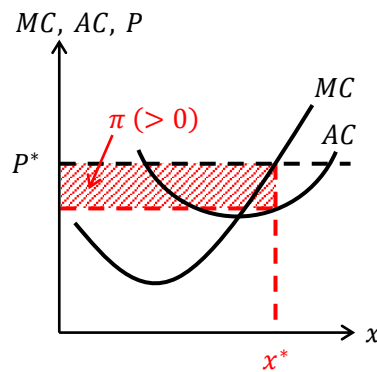
2. 左下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



* 2.では利潤最大化をしていないが、利潤は $\pi > 0$ (黒字) であることに注意。

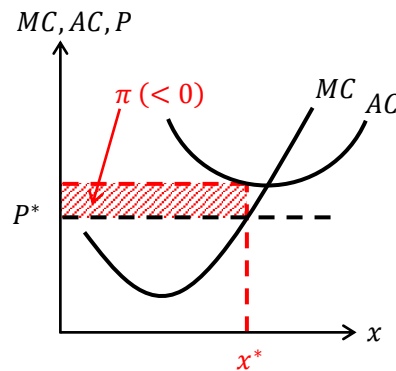
【問題】

1. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。

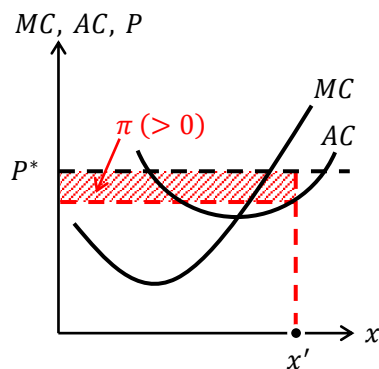


* 例題の 1.と同じである。

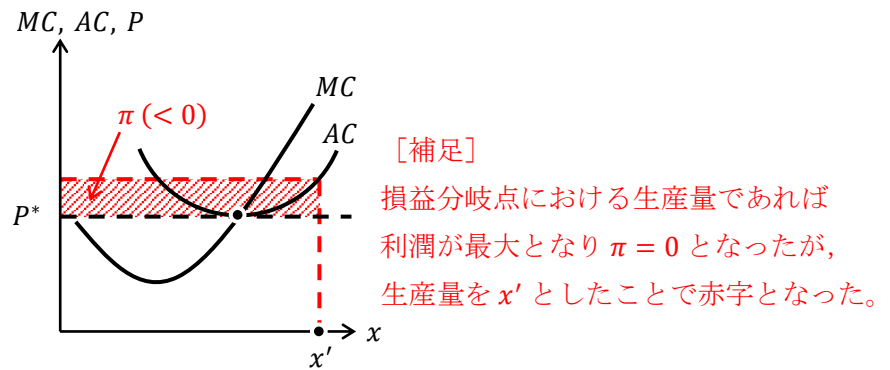
2. 下図において、価格が P^* のとき、利潤が最大となる生産量 x^* を書き入れ、その生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



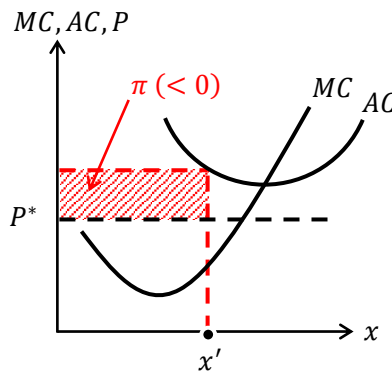
3. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



4. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。

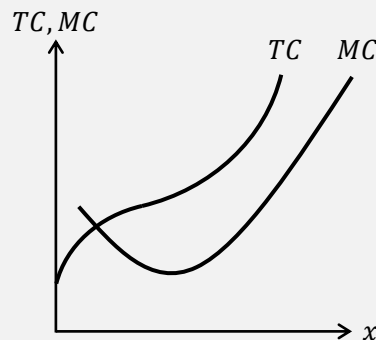


5. 下図において、価格が P^* のとき、生産量 x' を選択するとする。この生産量における利潤 π に相当する箇所がわかるように斜線部で示しなさい。



<補足9> 単位「円」は「円」でも…

次の図は正しいだろうか？



この図は正しくない。そもそも限界費用曲線は総費用曲線から得られるので、このように両者を同じグラフに書くのは間違っている。ただ、次のように反論されたらどうだろうか？

「総費用も限界費用も単位が「円」なのだから、同じ縦軸に並べてもいいはずだ！」

いかにも合っていそうな主張だが、やはり間違っている。限界費用の単位（や平均費用の単位や価格の単位）は正確には「円/個」なのである。この単位の意味は「1 個あたりの金額（円）」である。確かに、限界費用は 1 つ分の増産コストであったので納得いくだろう。

5. 利潤最大化の計算問題

前節までは、利潤最大化問題をグラフで考えてきたが、ここでは、主に利潤最大化問題の計算問題について扱っていくこととする。

第2節で、「企業は $P = MC$ となるように生産量 x^* を決める」ということを学んだが、次の例題を見てみよう。

【例題】 限界費用関数を $MC = x + 1$ とし、価格を $P = 3$ とするとき、この企業の利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

(解答)

利潤最大化条件 $P = MC$ より、

$$P = MC$$

$$3 = x + 1$$

よって、 $x^* = 2$ となる。

$$\underline{x^* = 2}$$

この例題を見てわかるように、利潤最大化条件 $P = MC$ を使って求まるのは、利潤を最大とする生産量 x^* なのである。まさに、

「企業は $P = MC$ となるように生産量 x^* を決める」

という文章通りではないだろうか。

【問題】 次の利潤最大化問題を解きなさい。

1. 限界費用関数が $MC = x + 3$ であり、価格が $P = 5$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$P = MC$ より、

$$5 = x + 3 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x^* = 2$$

$$\underline{x^* = 2}$$

2. 限界費用関数が $MC = 2x + 4$ であり、価格が $P = 8$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$P = MC$ より、

$$8 = 2x + 4 \rightarrow -2x = -4 \rightarrow x^* = 2$$

$$\underline{x^* = 2}$$

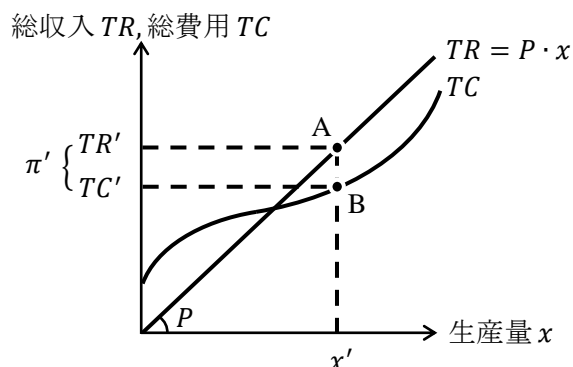
3. 限界費用関数が $MC = 10x + 20$ であり、価格が $P = 50$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$P = MC$ より、

$$50 = 10x + 20 \rightarrow -10x = -30 \rightarrow x^* = 3$$

$$\underline{x^* = 3}$$

ここからは、これまでとは違ったグラフを使って利潤最大化について考えていく。
 下図は生産量を x' としたときの状況を表している。



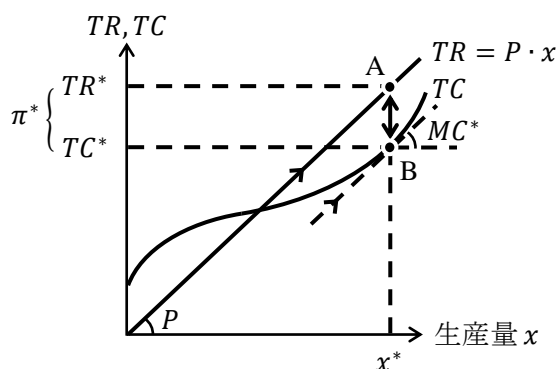
この図から、点 A の高さが生産量 x' における総収入 TR' 、点 B の高さが生産量 x' における総費用 TC' であることがわかる。そのため、生産量 x' における利潤は

$$\pi' = TR' - TC'$$

であるので、点 A と点 B の高さの差が利潤 π' であることがわかる。

このことから、利潤を最大化するには点 A と点 B の高さの差が最も大きくなるように生産量 x を選ばばよいことがわかる。

ではどうやって、利潤が最大となる生産量 x^* を選ばばよいのかというと、下図を見てほしい。



この図では、点 A と点 B の高さの差（両矢印の長さ）である利潤が π^* で最大化されている。なぜなら、点 B における接線と TR 曲線が平行になっているからである。平行であれば、点 A と点 B が最も離れているといえるのである。

さらに、点 B における接線と TR 曲線が平行であるということは、点 B における接線の傾き（限界費用 MC^* ）と TR 曲線の傾き（価格 P ）が等しいということであり、これは利潤最大化条件である $P = MC$ が成立していることを意味している。

このような図を用いても、「企業が $P = MC$ となるように生産量 x^* を決めれば利潤が最大になっている」ということを確認することができるのである。

【例題】総費用関数を $TC = x^2 + 2x + 4$ とし、価格を $P = 10$ とするとき、この企業の利潤が最大となる生産量 x^* とその生産量における利潤 π^* を求めなさい。

(解答) $P = MC$ を使った解法

総費用関数 $TC = x^2 + 2x + 4$ より、限界費用関数は $MC = 2x + 2$ であるので、利潤最大化条件 $P = MC$ より、

$$P = MC$$

$$10 = 2x + 2 \rightarrow -2x = -8 \rightarrow x^* = 4$$

また、 $x^* = 4$ のときの利潤は、

$$\pi = TR - TC = P \cdot x - (x^2 + 2x + 4) = 10x - x^2 - 2x - 4 = -x^2 + 8x - 4$$

より、

$$\pi^* = -4^2 + 8 \cdot 4 - 4 = -16 + 32 - 4 = 12$$

$$x^* = 4, \pi^* = 12$$

(別解) $M\pi = 0$ を使った解法

利潤の式は次のように書ける。

$$\pi = TR - TC = P \cdot x - (x^2 + 2x + 4) = 10x - x^2 - 2x - 4 = -x^2 + 8x - 4$$

これより、**限界利潤 $M\pi$** (さらに1つ生産することで増える利潤) をゼロと置いて、

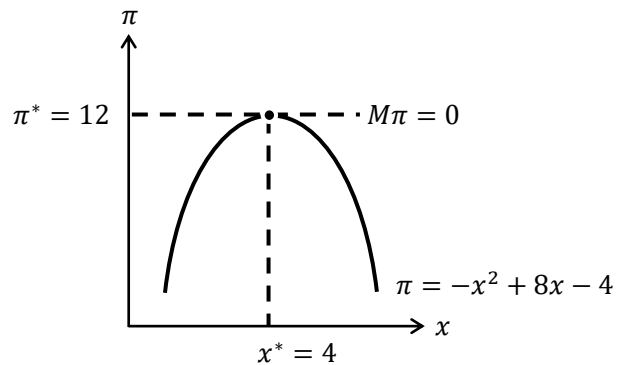
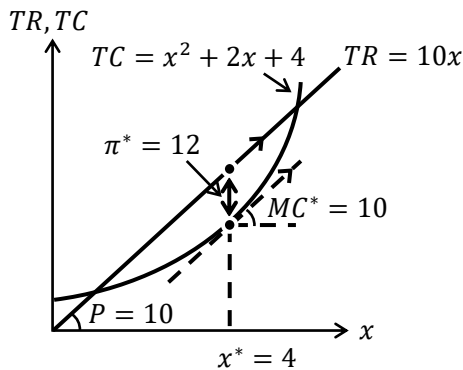
$$\boxed{M\pi = \frac{d\pi}{dx}} = -2x + 8 = 0 \rightarrow x^* = 4$$

また、 $x^* = 4$ のときの利潤は、

$$\pi^* = -4^2 + 8 \cdot 4 - 4 = -16 + 32 - 4 = 12$$

$$x^* = 4, \pi^* = 12$$

この例題から次の2図が書ける。



(別解) 「 $M\pi = 0$ を使った解法」では「微分してゼロ」を使っている。右上図のように、利潤の式が上に凸の放物線となるので、「微分してゼロ」で接線の傾きがゼロになる頂点の生産量 x を求めることができるのである。(ここがわからない人は第0講「9. 微分」を参照)

また、 $P = MC$ と $M\pi = 0$ の関係については<補足10>で解説する。

【問題】

(1) 次の利潤最大化問題を解きなさい。

1. 総費用関数が $TC = x^2 + 10$ であり、価格が $P = 20$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$$TC = x^2 + 10 \rightarrow MC = 2x \text{ であるので,}$$

$$P = MC \text{ より, } 20 = 2x \rightarrow x^* = 10$$

$$\text{(別解)} \pi = 20x - (x^2 + 10) = -x^2 + 20x - 10 \rightarrow M\pi = -2x + 20 = 0 \rightarrow x^* = 10$$

$$\underline{x^* = 10}$$

2. 総費用関数が $TC = 2x^2 + 3x + 1$ であり、価格が $P = 15$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$$TC = 2x^2 + 3x + 1 \rightarrow MC = 4x + 3 \text{ であるので,}$$

$$P = MC \text{ より, } 15 = 4x + 3 \rightarrow -4x = -12 \rightarrow x^* = 3$$

$$\text{(別解)} \pi = 15x - (2x^2 + 3x + 1) = -2x^2 + 12x - 1 \rightarrow M\pi = -4x + 12 = 0 \rightarrow x^* = 3$$

$$\underline{x^* = 3}$$

3. 平均費用関数が $AC = x + 2$ であり、価格が $P = 10$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。(ヒント) $TC = AC \cdot x$ を使うこと

$$TC = AC \cdot x = (x + 2) \cdot x = \boxed{x^2 + 2x} \rightarrow MC = 2x + 2 \text{ であり,}$$

$$P = MC \text{ より, } 10 = 2x + 2 \rightarrow -2x = -8 \rightarrow x^* = 4$$

$$\text{(別解)} \pi = 10x - (\boxed{x^2 + 2x}) = -x^2 + 8x \rightarrow M\pi = -2x + 8 = 0 \rightarrow x^* = 4$$

$$\underline{x^* = 4}$$

4. 平均費用関数が $AC = 6x + 2 + \frac{4}{x}$ であり、価格が $P = 14$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* を求めなさい。

$$TC = AC \cdot x = \left(6x + 2 + \frac{4}{x}\right) \cdot x = \boxed{6x^2 + 2x + 4} \rightarrow MC = 12x + 2 \text{ であり,}$$

$$P = MC \text{ より, } 14 = 12x + 2 \rightarrow -12x = -12 \rightarrow x^* = 1$$

$$\text{(別解)} \pi = 14x - (\boxed{6x^2 + 2x + 4}) = -6x^2 + 12x - 4 \rightarrow M\pi = -12x + 12 = 0 \rightarrow x^* = 1$$

$$\underline{x^* = 1}$$

(2) 次の利潤最大化問題を解きなさい。

1. 総費用曲線が $TC = x^2$ であり、価格が $P = 8$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* とその生産量における利潤 π^* を求めなさい。

$$P = MC \text{ より, } 8 = 2x \rightarrow x^* = 4$$

$$\text{これを } \pi = TR - TC = P \cdot x - TC = 8x - x^2$$

$$\text{に代入すると, } \pi^* = 8 \cdot 4 - 4^2 = 32 - 16 = 16$$

$$\text{(別解)} \pi = 8x - x^2 \rightarrow M\pi = 8 - 2x = 0 \rightarrow x^* = 4$$

これを $\pi = 8x - x^2$ に代入して、 $\pi^* = 16$ を得る。

$$\underline{x^* = 4, \pi^* = 16}$$

2. 総費用関数が $TC = 5x^2 + 10x + 2$ であり、価格が $P = 30$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* とその生産量における利潤 π^* を求めなさい。

$$P = MC \text{ より, } 30 = 10x + 10 \rightarrow -10x = -20 \rightarrow x^* = 2$$

$$\text{これを } \pi = TR - TC = P \cdot x - TC = 30x - (5x^2 + 10x + 2) = -5x^2 + 20x - 2$$

$$\text{に代入すると, } \pi^* = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 - 2 = -20 + 40 - 2 = 18$$

$$\text{(別解) } \pi = -5x^2 + 20x - 2 \rightarrow M\pi = -10x + 20 = 0 \rightarrow x^* = 2$$

これを $\pi = -5x^2 + 20x - 2$ に代入して、 $\pi^* = 18$ を得る。

$$\underline{x^* = 2, \pi^* = 18}$$

3. 平均費用関数が $AC = 2x + 4$ であり、価格が $P = 12$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* とその生産量における利潤 π^* を求めよ。

$$TC = AC \cdot x = (2x + 4) \cdot x = 2x^2 + 4x \rightarrow MC = 4x + 4$$

$$P = MC \text{ より, } 12 = 4x + 4 \rightarrow -4x = -8 \rightarrow x^* = 2$$

$$\text{これを } \pi = TR - TC = P \cdot x - TC = 12x - (2x^2 + 4x) = -2x^2 + 8x$$

$$\text{に代入すると, } \pi^* = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = -8 + 16 = 8$$

$$\text{(別解) } \pi = -2x^2 + 8x \rightarrow M\pi = -4x + 8 = 0 \rightarrow x^* = 2$$

これを $\pi = -2x^2 + 8x$ に代入して、 $\pi^* = 8$ を得る。

$$\underline{x^* = 2, \pi^* = 8}$$

4. 平均費用関数が $AC = x + 2 + \frac{4}{x}$ であり、価格が $P = 10$ であるとき、利潤が最大となる生産量 x^* とその生産量における利潤 π^* を求めなさい。【例題】と（ほぼ）同じ問題

$$TC = AC \cdot x = \left(x + 2 + \frac{4}{x}\right) \cdot x = x^2 + 2x + 4 \rightarrow MC = 2x + 2$$

$$P = MC \text{ より, } 10 = 2x + 2 \rightarrow -2x = -8 \rightarrow x^* = 4$$

$$\text{これを } \pi = TR - TC = P \cdot x - TC = 10x - (x^2 + 2x + 4) = -x^2 + 8x - 4$$

$$\text{に代入すると, } \pi^* = -4^2 + 8 \cdot 4 - 4 = -16 + 32 - 4 = 12$$

$$\text{(別解) } \pi = -x^2 + 8x - 4 \rightarrow M\pi = -2x + 8 = 0 \rightarrow x^* = 4$$

これを $\pi = -x^2 + 8x - 4$ に代入して、 $\pi^* = 12$ を得る。

$$\underline{x^* = 4, \pi^* = 12}$$

<補足10> $P = MC$ と $M\pi = 0$ の関係

結論から言うと、 $P = MC$ と $M\pi = 0$ は同じである。ではなぜ同じであるのか示そう。

$$\pi = TR - TC = P \cdot x - TC \rightarrow \boxed{M\pi} = P - MC \boxed{= 0} \rightarrow \boxed{P = MC}$$

これで $P = MC$ と $M\pi = 0$ が同じであると示すことができた。そのため、 $P = MC$ を利潤最大化条件と呼ぶように、 $M\pi = 0$ も利潤最大化条件と呼んでもいいのである。

ところで正確には、 $P = MC$ は「完全競争市場における」利潤最大化条件である。それに対し、「より一般的な」利潤最大化条件は $MR = MC$ である（ MR は<補足2>で説明した限界収入である。 $MR = MC$ はこの授業の範囲外としているため説明は別の機会に譲りたい）。

また、第5講の<補足8>に関連するが、 $P = MC$ 、 $M\pi = 0$ 、 $MR = MC$ はどれも一階の条件（FOC）と表記することがある。

<補足 1 1> 損益分岐点を求める計算問題

ここでは、少し難易度の高い問題を 1 問紹介しておく。公務員試験だとこれくらいが標準レベルの問題ということになる。

【例題】総費用関数が $TC = x^2 + 4$ であるとき、限界費用曲線と平均費用曲線をグラフに書き、損益分岐点における価格 P_0 を求めなさい。

(解答)

総費用関数が $TC = x^2 + 4$ であるので、限界費用曲線の式は

$$MC = 2x$$

となり、平均費用曲線の式は

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$$

となる。

損益分岐点は、限界費用曲線と平均費用曲線との交点であるので、限界費用曲線の式と平均費用曲線の式の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} MC = 2x \\ AC = x + \frac{4}{x} \end{cases}$$

右辺どうしをくっつけると、

$$2x = x + \frac{4}{x} \rightarrow x = \frac{4}{x} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

となる。生産量は $x > 0$ であるので、損益分岐点における生産量が $x_0 = 2$ と求めることができた。(損益分岐点における生産量を x_0 と表記している)

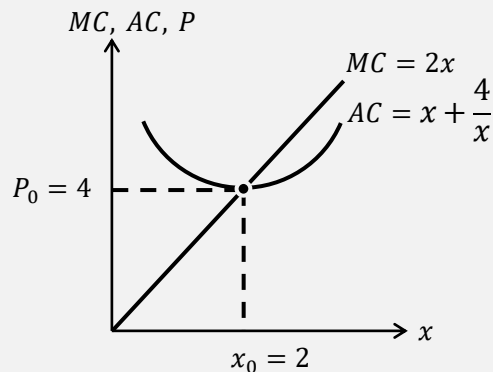
次に、 $x_0 = 2$ を限界費用曲線 (もしくは、平均費用曲線) に代入すると、

$$MC = 2 \cdot 2 = 4 \quad \left(AC = 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4 \right)$$

となり、これが求めたい $P_0 = 4$ である。

$$\underline{P_0 = 4}$$

図示すると、次のようになる。



<補足 1 2> 生産関数

この授業は経済学の入門的な内容に絞るため、ミクロ経済学で有名な「生産関数」には触れていない。ここでは、生産関数について簡単に説明しておくこととする。

生産要素を労働 L と資本 K としたとき、**生産関数**を

$$x = L \cdot K \quad (x: \text{生産量}, L: \text{労働量}, K: \text{資本量})$$

とする。例えば、労働を $L = 3$ 人だけ雇い、資本（機械）を $K = 2$ 台だけ使ったとするならば、生産量は $x = 3 \cdot 2 = 6$ 個と計算することができる。これを見て効用関数と考え方が似ていると思った人もいるかもしれない。実は、このような消費者理論と生産者理論の対応関係が「**双対性**」という上級論点に繋がっていくのである。

<補足 1 3> 生産要素を含む利潤最大化【やや難】

この授業では、<補足 1 2> で取り上げた生産関数が登場していないため、利潤最大化を考える上で、労働 L と資本 K といった生産要素が登場してこなかった。

しかし、ミクロ経済学のレベルが少し上がれば、労働 L と資本 K といった生産要素を含む利潤最大化問題が登場するので、ここで簡単に紹介しておこう。

第 6 講の問題集 p.4 と第 6 講の<補足 4> から、可変費用 VC は「労働 L に対する費用」であり、固定費用 FC は「資本 K に対する費用」ということであった。ここで、労働の価格を賃金率 $w = 10$ (wage; 一人雇うのにかかる費用。労働 L の単位が労働時間であれば、時給をイメージするとよい)、資本の価格を利子率 $r = 20$ (interest rate; 詳細は第 12 講<補足 1> や第 13 講<補足 9> を参照) とすると、総費用 TC は、

$$\begin{aligned} TC &= \underbrace{\text{労働の価格} \times \text{労働量}}_{\substack{w \\ \text{可変費用 } VC}} + \underbrace{\text{資本の価格} \times \text{資本量}}_{\substack{r \\ \text{固定費用 } FC}} \\ &= wL + rK \\ &= 10L + 20K \end{aligned}$$

と表すことができる。

ここで、企業はプライステイカーであるので、企業が生産する財の価格 P は 5 とする。(ちなみに、労働の**価格**や資本の**価格**が 10 や 20 と決まっていたことも、企業がプライステイカーだからである。労働者の賃金（労働の価格）は、労働市場で決まると考えているので、「企業は労働者の給料を決めることが出来ない」と考えるのである）

また、生産関数を<補足 1 2> のように、 $x = L \cdot K$ とすれば、利潤 π の式は、

$$\begin{aligned} \pi &= TR - TC \\ &= P \cdot \boxed{x} - (wL + rK) \\ &= P \cdot \boxed{L \cdot K} - (wL + rK) \\ &= 5LK - (10L + 20K) \\ &= 5LK - 10L - 20K \end{aligned}$$

と書くことができる。

ここで、利潤 π を最大にするために、雇わなければならない労働者数（つまり、労働量 L ）と使用する機械の台数（つまり、資本量 K ）を求めたいとする。（これこそ、「生産要素を含む」利潤最大化である！）

どうすれば良いのかというと、利潤 π の式を、労働 L と資本 K のそれぞれで「偏微分してゼロ」とするのである。実際にやってみると、 $\pi = 5LK - 10L - 20K$ より、

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 5K - 10 = 0 \rightarrow 5K = 10 \rightarrow K^* = \underline{2}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 5L - 20 = 0 \rightarrow 5L = 20 \rightarrow L^* = \underline{4}$$

したがって、企業の利潤を最大とするために雇わなければならない労働者数は $L^* = 4$ 人であり、使用する機械の台数は $K^* = 2$ 台ということになり、生産要素を含む利潤最大化問題が解けたことになるのである。

<補足 1 4> 資本のレンタル価格【やや難】

直前の<補足 1 3>で資本の価格を利率 r と書いたが、この内容に関しては、経済学の勉強が進むにつれて、（過去の私を含め）混乱する人が続出するので説明を加えておきたいと思う。

資本の価格は、利率 r と書かれることもあるが、**資本のレンタル価格 r** と書かれたり、**資本のレンタルコスト r** と書かれたりすることもある。初学者であつたら「ふ〜ん…」と読み飛ばすかもしれないが、実は、利率 r はマクロ経済学でも頻繁に登場してきて、皆さんの中にもそのうち、利率 r と資本 K の関係って一体何だ！？どうして、資本の価格が利率 r なのか？そして、資本のレンタル価格って…？と疑問が次々に出てくるのではないだろうか。この疑問は考えれば考えるほど、経済学の非常に本質的な内容に近づくことになるので、ここでは深入りは避けながら、ある程度説得的な説明を与えておこう。

結論から言うと、経済学では、

「企業は、資本家から資本 K をレンタルして、生産活動をおこなう」

と考えているのである。

これは、企業は資本（機械設備）を購入するのではなく、レンタルする（借りる）と考えているということである。そのため、資本の価格は、資本の購入費用ではなくて、レンタル費用（レンタルコスト、レンタル価格）と言うのである。これで、資本の価格を「資本のレンタル価格 r 」と言うことがわかったのではないだろうか。

次に、資本の価格を「利率 r 」と言う理由についてである。企業は資本（機械設備）を得る際に、そのお金を銀行から借りることが通常である。このように考えれば、「資本のレンタル価格」は、銀行の金利、つまり「利率 r 」と言い換えることができるのである。さらに、銀行にお金を貸している（お金を預けている）人を「家計」とするとすれば、「資本家」の正体は「家計」になるのである。そのため、（より進んだレベルの）経済学では、企業が資本に対して支払うお金は、すべて家計のものになると設定することが多いのである。