はじめよう経済学　－問題編－
第 0 講　経済数学入門

経済学で使う数学を最も効率よく学ぶ

第 0 講では，経済学で使う数学（**経済数学**）を学んでいきます。なぜ，第 0 講としているかというと，中学や高校で学ぶ数学にある程度自信がある人は，第 1 講からスタートして良いからです。第 0 講は「数学は苦手だな」と思っている人にぜひ取り組んでもらいたいと思います。

やはり，経済学をちゃんと理解するためには「数学」は欠かせない道具。ちなみに，経済学の内容には，数学ができなくても感覚的に理解できることがたくさんあります。しかし，感覚ばかりに頼っていては，説得力のない怪しい議論しかできません。経済学を学ぶ上である程度の数学力は必要です。

経済学の基礎を学ぶ上で，最低限必要な数学力を身につけるために，学習効率が良いと思われる問題をまとめました。ページをめくっていただくと，中学や高校の数学の復習のように見えますが，どの内容も後の経済学でよく登場するものばかりです。問題によっては，どうしてこんな面倒な作業をさせるのだろうか？と感じる箇所もあるかもしれませんが，そこにもちゃんと作問の意図があります。その都度，作問の意図までは書いていませんので，「あとで大切になることなのだろうな」と思って解き進めてください。

また，第 0 講の問題を解いていて，「難しいな」とか「少しひっかかるな」というところがあれば，その箇所を繰り返し解くことがベストだと思います。…が，第 1 講以降でも再登場する数学の知識ばかりですので，とりあえず飛ばしていただいて，また出てきたときに学び直すというやり方でも良いと思います。準備運動（数学の勉強）ばかりして，経済学に入る前に疲れてしまっていては本末転倒ですから。

第 0 講の問題がすらすら解ければ，第 1 講以降の内容がとても頭に入りやすくなります。ちなみに，国家公務員一般職試験（大卒程度試験）で出題される「ミクロ経済学」や「マクロ経済学」のレベルであっても，第 0 講の計算問題が解ければ数学で苦労することはほとんどなくなるので，公務員試験や資格試験の経済学に苦戦している人にとっても有益な問題集になるかと思います。

また，**＜補足＞**が各所に登場しますが，飛ばしていただいても構いません。この補足を作成した理由は，読んでいる人の気分転換になればという気持ちもありますが，それ以上に，この教材がさらに高いレベルの経済学を学ぶための橋渡しになることを狙いとしているためです。

それでは，第 0 講の問題を解き進めていきましょう。この問題集は「はじめよう経済学」の動画授業と対応していますので，先に第 0 講の動画を見てから問題を解き始められることをおすすめします。しかし，第 0 講は，動画を見ていなくても問題が解けるように，第 1 講以降よりも例題や解説を多く記載しています。また，解答編は，様々なレベルの人に解いていただくことを想定して，これでもかというくらい計算過程を丁寧に書いています。計算過程は各自の数学レベルに応じて，適宜飛ばしながら見ていってください。

目次

次回の第 1 講では，「6. 図形」「7. グラフ」「8. 連立方程式」の知識を使います。また，第 2 講では「1. 分数」「4. 変化率」「9. 微分」，第 4 講で「5. 指数」「10. 偏微分」の知識を使います。「12. 数列」は第 10 講で登場し，「2. 逆数」「3. 両辺に～」「11. 関数」は数学を使う上で知っておいた方がよい知識です。

第 0 講の内容は，経済学を学ぶ上でどれも大切ではありますが，最重要なテーマを強いて挙げるとすれば，「5. 指数」と「9. 微分」になります。これら 2 つの分野を諦めずに取り組んでいただければ，後の経済学の学習がとても楽になります。また，「11. 関数」「12. 数列」「13. 総合問題（経済学での計算例）」は余力があれば取り組んでいただければと思います。

＜補足一覧＞

1. 分数

次の式を見てほしい。

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4$$

これより分数は,

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \text{分子} \div \text{分母}$$

のように,「割り算の形」に変形できることがわかる。この考え方を用いれば,次の例題を簡単に解くことができる。(別解のように分子と分母に同じ数字をかけて解いてもよい)

【例題】次の計算をしなさい。

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$$

(別解) $$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4}{\frac{3}{4} \times 4} = \underline{\frac{2}{3}}$$

経済学では,このように分数の中に分数が入った計算や,分数の分子や分母の中に複雑な式が入ってくることが(ものすごく)多い。

【問題】次の計算をしなさい。

1. $\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} =$

2. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} =$

3. $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} =$

4. $\dfrac{0.5}{\frac{1}{4}} =$

5. $\dfrac{\frac{3}{4}}{3} =$

6. $\dfrac{\frac{1}{5}}{0.1} =$

2. 逆数

経済学では，計算のテクニックとして**逆数をとる**という作業をすることがある。

【例題】次の空所に適切な値，もしくは式を入れなさい。

(1)　5 の逆数は（　$\frac{1}{5}$　）である。　(2)　$-\frac{3}{4}$の逆数は（　$-\frac{4}{3}$　）である。

(3)　$\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$ の両辺の逆数をとると（　$x=\frac{3}{2}$　）となる。

(4)　$\frac{1}{x}>\frac{2}{5}$ の両辺の逆数をとると（　$x<\frac{5}{2}$　）となる。

例題(4)は次を確認すれば明らかであろう。

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{=0.5}>\underbrace{\frac{2}{5}}_{=0.4}\quad\rightarrow\quad 2<\underbrace{\frac{5}{2}}_{=2.5}$$

（注意）

この問題集では，計算の手順（流れ）を示す際に，上のように矢印「→」を使って書くことが多い。これは数学の同値記号「⇔」などではなく，単に計算の流れを示しているに過ぎないので注意してほしい。

【問題】次の空所に適切な値を入れなさい。ただし，問題 7, 8.は正しい不等号に〇を書きなさい。

1.　2 の逆数は（　　　）である。　2.　-10 の逆数は（　　　　）である。

3.　$\frac{4}{5}$の逆数は（　　　）である。　4.　$\frac{1}{3}$の逆数は（　　　）である。

5.　$\frac{1}{x}=-\frac{9}{10}$ について，両辺の逆数をとると $x=$（　　　　）となる。

6.　$\frac{1}{x}=6$ について，両辺の逆数をとると $x=$（　　　）となる。

7.　$\frac{1}{x}<3$（$x>0$）について，両辺の逆数をとると x（　$<$　,　$>$　）$\frac{1}{3}$ となる。

8.　$\frac{1}{x}>\frac{5}{4}$ について，両辺の逆数をとると x（　$<$　,　$>$　）$\frac{4}{5}$ となる。

問題 5.から 8.は次節で再び取り上げるが，「両辺に～をかける」といった方法でも解くことができる。（問題 7.に $x>0$ がある理由は，例えば $x=-2$ のときは次のようになるため）

$$\frac{1}{-2}<3\quad\rightarrow\quad -2<\frac{1}{3}$$

＜補足１＞ 分母が０（ゼロ）になる分数

5 の逆数は$\frac{1}{5}$であった。実は，元の数(5)とその逆数$\left(\frac{1}{5}\right)$をかけ算すると 1 となる。これが逆数の特徴（むしろ，逆数の定義）である。

では，「0」には逆数があるのだろうか？0 の逆数は$\frac{1}{0}$だろうか？

実は，0 には逆数がない。それもそのはずで，0 には何をかけても 0 になってしまうので，「かけたら 1 になる数」が存在しないのである。ところで，分母に 0 がくる分数，例えば，$\frac{1}{0}$ という数は「数学の世界ではタブー」のような存在である。その理由を議論することは数学的に奥の深い話となり，この授業の趣旨ではないので避けることにする。

ともあれ，「0 で割ってはいけない」ことは肝に銘じてほしい。私も経済学上の問題について計算をしていて，分数の分母が 0 になったときは，「あれ，どこかで計算を間違ったかな」「問題に誤りはないかな」などと考える。ちなみに，分子が 0 の場合は，値は 0 になり数学的にも問題はない。

$$\frac{0}{1} = 0, \qquad \frac{1}{0} = (\text{解なし})$$

3. 両辺に～

例えば，「$2 = 2$」という式に対して，両辺を 2 乗しても（$2^2 = 2^2 \ \rightarrow\ 4 = 4$），両辺に 10 を足しても（$2 + 10 = 2 + 10 \ \rightarrow\ 12 = 12$），両辺に 3 をかけても（$2 \times 3 = 2 \times 3 \ \rightarrow\ 6 = 6$），何ら問題ないであろう（もちろん，両辺に逆数をとっても構わない）。

このことは「$x = y$」のように，式の中に文字が入っていても同じように考えることができる。「$x = y$」は，x の値と y の値が（例えば「$2 = 2$」のように）等しいため，「$x = y$」の両辺を 2 乗などしても問題ないのである。

【例題】次の方程式を解きなさい。

(1) $x + 5 = 8$ （解答）$x + 5 \boxed{-5} = 8 \boxed{-5} \quad \rightarrow \quad x = 8 - 5 = \underline{3}$

(2) $3x = 9$ （解答）$3x \boxed{\div 3} = 9 \boxed{\div 3} \quad \rightarrow \quad x = 9 \div 3 = \underline{3}$

(3) $\frac{1}{2}x = 4$ （解答）$\frac{1}{2}x \boxed{\times 2} = 4 \boxed{\times 2} \quad \rightarrow \quad x = 4 \times 2 = \underline{8}$

例題(1)を解くとき，次のように解いた人はいないだろうか。

「5 を右辺にもっていけば，プラスがマイナスになるから，$8 - 5 = 3$ だ！」

この解き方でも答えは合うが，正しい考え方は「両辺から 5 を引く」ということである。この正しい考え方は肝に銘じておいた方が良い。

＜補足２＞ 数学は苦手？

補足というか余談になってしまうが,「プラスの数字を右辺にもっていけばマイナスの数字になる」というように,理屈を考えずに解き方だけを覚えている人に,数学が苦手だと感じている人が多いのではないだろうかと思う。

このような解き方の暗記を積み重ねていった結果,「そもそもこの理屈って何だっけ…」と立ち止まったときに,「あれ？わからないぞ。どこから学び直せばいいんだ…」と途方に暮れて,「数学は苦手だなぁ」と感じるのではないだろうか。

第 0 講の目的は,「数学を好きになる」というものではなく,「経済学を学ぶ際に,数学でつまずかないようになる」ことである。そのため,数学の細かい理屈なんて無視していいのでないか？と思うかもしれない。しかし,経済学で使う数学の知識は,理屈まで理解できていた方が経済学が学びやすくなるのである。数学が苦手だと思う人は,ここは踏ん張って,数学の細かい理屈の話にもお付き合いいただければと思う。

【問題】例を参考にして,次の空所に適切な値を入れなさい。

例 1. $x-1=3$　両辺に（ $+1$ ）して,$x=$（ 4 ）となる。

例 2. $2x=6$　両辺に÷（ 2 ）して,$x=$（ 3 ）となる。

（別解）両辺に×（ $\frac{1}{2}$ ）して,$x=$（ 3 ）となる。

1. $x+2=6$　両辺に（　　）して,$x=$（　　）となる。
2. $x+4=-2$　両辺に（　　）して,$x=$（　　）となる。
3. $x-2=5$　両辺に（　　）して,$x=$（　　）となる。
4. $x-1=-9$　両辺に（　　）して,$x=$（　　）となる。
5. $4x=12$　両辺に÷（　　）して,$x=$（　　）となる。

   （別解）両辺に×（　　）して,$x=$（　　）となる。
6. $-5x=10$　両辺に÷（　　）して,$x=$（　　）となる。

   （別解）両辺に×（　　）して,$x=$（　　）となる。
7. $\frac{1}{3}x=8$　両辺に×（　　）して,$x=$（　　）となる。

   （別解）両辺に÷（　　）して,$x=$（　　）となる。
8. $-\frac{2}{3}x=-12$　両辺に×（　　）して,$x=$（　　）となる。

   （別解）両辺に÷（　　）して,$x=$（　　）となる。
9. $2x+1=5$　まず,両辺に（　　）して,$2x=4$とし,

   次に,両辺に÷（　　）して,$x=$（　　）となる。

10.　$-\frac{1}{4}x-2=7$　　まず，両辺に（　　　　）して，$-\frac{1}{4}x=9$ とし，

次に，両辺に×（　　　　）して，$x=$（　　　　）となる。

11.　$\frac{1}{x}=-\frac{9}{10}$　　まず，両辺に×（　　）して，$1=-\frac{9}{10}x$ とし，左辺と右辺を反転させ，

$-\frac{9}{10}x=1$ とし，両辺に×（　　　　　）して，$x=$（　　　　）となる。

（別解）両辺の逆数をとって，$x=$（　　　　）となる。（前節の問題 5.）

12.　$\frac{1}{x}=6$　　両辺の逆数をとって，$x=$（　　　）となる。（前節の問題 6.）

13.　$\frac{1}{x}<3$　　両辺の逆数をとって，x（ ＜ ， ＞ ）$\frac{1}{3}$となる。（前節の問題 7.）

14.　$\frac{1}{x}>\frac{5}{4}$　　両辺の逆数をとって，x（ ＜ ， ＞ ）$\frac{4}{5}$となる。（前節の問題 8.）

＜補足３＞ 方程式と関数の違い

上記の問題 12.までの 14 本の式（2 つの例を含む）はすべて**方程式**である（ちなみに，問題 13.と 14.は**不等式**である）。それに対して，

$$y=2x+1 \qquad y=x^2$$

といった式は**関数**と考えればよい。（$y=2x+1$ は**一次関数**，$y=x^2$ は**二次関数**であるが，関数の考え方については第 11 節で詳しく解説する）。

方程式と関数のわかりやすい判別方法としては，
「この式を解けば，x の値がわかるぞ！」といった場合は方程式であり，
「この式から横軸を x，縦軸を y とするグラフが書けるな！」といった場合は関数と考えておけばよい。より正確な説明は次の通り。

方程式　：**変数**（いろいろな値をとる文字）の特定の値についてだけ，
　　　　　両辺が等しくなる等式

関数　　：x の値が決まると，y の値が 1 つに決まる関係

ちなみに，不等号に関して，高校までは「≦（小なりイコール）」や「≧（大なりイコール）」という（等号付き）不等号が登場したが，大学数学では「≤」や「≥」がよく使われる（記号の意味は「≦」や「≧」と同じ）ため，この資料でも「≤」や「≥」を用いるものとする。

4. 変化率

ある商品の価格が 100 円から 120 円に値上がりしたとき，価格は 20%だけ値上がりしたと暗算することは簡単である。実は，この「20%」を求める式がある。それが，

$$\frac{120-100}{100}=\frac{20}{100}=0.2\text{（20\%）}$$

である。確かに，この計算結果から 0.2 が得られ，これを 100 倍すれば 20%が求められる。

同じように考えると，価格が 120 円から 150 円に値上がりしたときは，

$$\frac{150-120}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}=0.25\text{（25\%）}$$

より，「価格は 25%だけ値上がりした」と求めることができるのである。

ここで，

$$\frac{150-120}{120}$$

この分母は，値上がり前（変化**前**）の価格であり，分子は，値上がり分（**変化分**）である。そのため，変化前の価格（Price）を P，価格の変化**分**を ΔP とすると，

$$\frac{150-120}{120}=\frac{\Delta P}{P}$$

と書くことができる。ちなみに，Δ は「デルタ」と読むので，ΔP は「デルタピー」と読めばよい。ΔP が「$\Delta P=$ 変化**後**の価格 $-$ 変化**前**の価格」と書けることは覚えておくこと。

したかって，価格の変化**率**を求める式は，

$$\text{価格の変化率}=\frac{\Delta P}{P}$$

と書けるのである。分母の P は「変化**前**の価格」となっていることにも注意である。

＊ マクロ経済学では，$\frac{\Delta P}{P}$ を「物価上昇率」や「インフレ率」と言ったりする。

＜補足４＞ P と書いて変化「前」の価格？

価格の変化率を考えるときに，P としか書いていないのに，変化「前」の価格と覚えましょう！ということに，納得がいかない人もいるかもしれない。そのような人は，次のように考えればよい。

変化前の価格を P_0，変化後の価格を P_1 とすると，変化率は，

$$\text{価格の変化率}=\frac{P_1-P_0}{P_0}=\frac{\Delta P}{P_0}$$

と書ける。つまり，

$\frac{\Delta P}{P_0}$ と書くのが正確だけれど，面倒なので $\frac{\Delta P}{P}$ と書いていると考えればよいのである。

ちなみに，価格の変化率を求める式は，

$$\text{価格の変化率} = \frac{\Delta P}{P} \times 100$$

このように表すべきだと思った人もいるかもしれない。間違いではないが，経済学では，20%の変化率を「変化率は 0.2」と表すことも多いのである。

【例題】次の価格変化における価格の変化率 $\Delta P/P$ を求めなさい。

(1)　価格：150 円 → 200 円

（解答）　$\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{200-150}{150} = \dfrac{50}{150} = \underline{\ \dfrac{1}{3}\ }$

(2)　価格：100 円 → 80 円

（解答）　$\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{80-100}{100} = \dfrac{-20}{100} = -\dfrac{1}{5} = \underline{\ -0.2\ }$

(3)　価格：120 円 → 300 円

（解答）　$\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{300-120}{120} = \dfrac{180}{120} = \dfrac{3}{2} = \underline{\ 1.5\ }$　（150%）

例題(2)のように価格が下がる場合は，変化率はマイナスの値をとる。また，例題(3)のように価格が 2 倍を超える場合は，変化率は 1（100%）を上回る。ちなみに，価格が 3 倍になるときの変化率は 2（200%）である。一応確認しておくと，価格が100 円 → 300 円のとき，

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{300-100}{100} = \frac{200}{100} = 2$$

となる。同様に考えれば，価格が 4 倍になるときの変化率は 3（300%）である。

経済学では解答を書く際に，分数で書いても，小数で書いてもどちらでもよい。ただ，分数はできる限り約分$\left(\text{例}\ \dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}\right)$し，帯分数は仮分数$\left(\text{例}\ 1\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}\right)$にしておくこと。

ちなみに，問題文に「価格の変化率 $\Delta P/P$ 」と書いているが，もちろん，

$$\Delta P/P = \frac{\Delta P}{P} \qquad \left(\text{分子}/\text{分母} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}}\right)$$

である。以前，『らんま1/2』という高橋留美子先生のマンガがあったが，このように「/」（スラッシュ）を使えば，分数を 1 行で書くことができる。

【問題】次の価格変化における価格の変化率 $\Delta P/P$ を求めなさい。

1. 価格：100 円 → 150 円

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{150-100}{100} = \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = \underline{\qquad\qquad}$$

2. 価格：120 円 → 100 円

$$\frac{\Delta P}{P} = \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = \underline{\qquad\qquad}$$

3. 価格：1200 円 → 1250 円

$$\frac{\Delta P}{P} = \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = \underline{\qquad\qquad}$$

4. 価格：1000 円 → 100 円

$$\frac{\Delta P}{P} = \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = \underline{\qquad\qquad}$$

5. 価格：100 円 → 360 円

$$\frac{\Delta P}{P} = \qquad\qquad \frac{\Delta P}{P} = \underline{\qquad\qquad}$$

問題 4.から，価格の変化率が-1（-100%）を下回ることがないことがわかる。例えば，価格が1 億円 → 1 円のとき，価格の変化率は次のように計算できる。

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1-1000000000}{1000000000} = \frac{-999999999}{1000000000} = -0.999999999 \fallingdotseq -1$$

ただし，仮にマイナスの価格まで下がることを認めれば，変化率は-1 を下回る。

5. 指数

指数とは，例えば「2^5」の 5 のことである。経済学では，指数の計算が（ものすごく）多く登場する。経済学の計算問題に慣れることは，指数の計算に慣れることと言っても過言ではない。まずは，指数の計算に必要な知識をまとめておく。

［基本］

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^2 = x \times x \qquad x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$\sqrt{\ }$（ルート，平方根）の計算方法を忘れている人は，以下の計算例で確認してほしい。

1. $\sqrt{4} = \sqrt{2\times 2} = 2$
2. $\sqrt{9} = \sqrt{3\times 3} = 3$
3. $\sqrt{12} = \sqrt{2\times 2\times 3} = 2\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
5. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
6. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \times$ （これ以上計算不可）
7. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2\times 3} = \sqrt{6}$
8. $2\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$
9. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

［指数法則］以下の 5 つのルールを**指数法則**という。

1. $x^a \times x^b = x^{a+b}$
2. $x^a \div x^b = x^{a-b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $(xy)^a = x^a y^a$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

上記の 1, 2, 3 は特によく使うが，これを覚えるには次の計算例をよく理解してほしい。

1'. $x^3 \times x^4 = (x \cdot x \cdot x) \times (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^7$

2'. $x^5 \div x^3 = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = x^2$

3'. $(x^3)^2 = (x \cdot x \cdot x)^2 = (x \cdot x \cdot x) \times (x \cdot x \cdot x) = x^6$

これで指数法則を忘れてしまっても，計算例を再現することで計算のルールを思い出すことができるだろう。（これ以降，かけ算の記号である「×」と「・」は特に区別せず，見やすさを優先して用いていくこととする）

【問題】次の計算をしなさい。

1. $2^0 =$
2. $\left(\frac{1}{5}\right)^0 =$
3. $(-1)^0 =$
4. $x^0 =$
5. $2^1 =$
6. $(-2)^1 =$
7. $x^1 =$
8. $3^2 =$
9. $(-2)^2 =$
10. $-3^2 =$
11. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$
12. $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 =$
13. $(2x)^3 =$
14. $-\left(\frac{1}{3x}\right)^2 =$
15. $5^{-1} =$
16. $(-2)^{-1} =$
17. $(-1)^{-1} =$
18. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} =$

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

20. $\left(\frac{1}{5x}\right)^{-1} =$

21. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} =$

22. $5^{-3} =$

23. $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} =$

24. $-3^{-2} =$

25. $-(-3)^{-3} =$

26. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 \div \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \div \frac{1}{4^2} = 4^2 =$

27. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} =$

28. $-\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} =$

29. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$

30. $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} =$

31. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} =$

32. $25^{\frac{1}{2}} =$

33. $100^{\frac{1}{2}} =$

34. $10000^{\frac{1}{2}} =$

35. $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} =$

36. $27^{\frac{1}{2}} =$

37. $12^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} =$

38. $18^{\frac{1}{2}} =$

39. $-20^{\frac{1}{2}} =$

40. $-50^{\frac{1}{2}} =$

41. $1000^{\frac{1}{2}} =$

42. $2000^{\frac{1}{2}} =$

43. $\sqrt{2} + \sqrt{2} =$

44. $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} =$

45. $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} =$

46. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

47. $4\sqrt{2} + 3\sqrt{8} =$

48. $6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} =$

49. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2\times 2}=$

50. $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=$

51. $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=$

52. $2\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}=$

53. $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}_{\text{有理化}}}=$

54. $\frac{1}{\sqrt{3}}=$

55. $\frac{1}{\sqrt{8}}=$

56. $\frac{4}{\sqrt{20}}=$

57. $\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{6\div 2}=$

58. $8\sqrt{6}\div 2\sqrt{3}=$

59. $\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=$

60. $\sqrt{5}\div\sqrt{3}=$

61. $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=$

62. $8^{-\frac{1}{2}}=$

63. $18^{-\frac{1}{2}}=$

64. $25^{-\frac{1}{2}}=$

問題 15.から 20.までは，逆数を求めることと同じである。つまり，「-1 乗する」ということは「逆数をとる」ことを意味している。

問題 53.から 60.までは，分母にルートを残さないようにする**有理化**の計算方法について確認したが，経済学では（そもそも大学では）有理化をしないケースが多い。

また，経済学では計算結果にルートを使わず，指数が入った形で解答するケースも多い。例えば，問題 59.を例にとると，

$$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=3^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

＊ $2^{-\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}$ と答えてもいいが，読みにくいと感じる場合は「・」を付けた方が良い。

と解答したり，

$$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

と解答したりするケースも多いのである。この 2 通りの方法を参考に，練習問題として問題 60.を用いて答えの中にルートが入らない形まで変形してみよう。（次ページ）

(1)　$\sqrt{5} \div \sqrt{3} =$

(2)　$\sqrt{5} \div \sqrt{3} =$

次に, 3 乗根$\sqrt[3]{\quad}$（立方根）などの計算方法についても確認しておいた方がいいであろう。次の例題を見てみよう。

【例題】次の計算をしなさい。ただし，問題(5)はやや難である。

(1)　$8^{\frac{1}{3}}\left(=\sqrt[3]{8}\right) = (\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3\text{つ}})^{\frac{1}{3}} = 2$

(2)　$24^{\frac{1}{3}} = (\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3\text{つ}} \times 3)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

(3)　$24^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{24^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(= 2^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

(4)　$81^{\frac{1}{4}}\left(=\sqrt[4]{81}\right) = (\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4\text{つ}})^{\frac{1}{4}} = 3$

(5)　$144^{\frac{1}{4}} = (\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4\text{つ}} \times 3 \times 3)^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot (3^2)^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 3^{2 \times \frac{1}{4}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

上の例題を見てわかるように，3 乗根の計算は，数字が 3 つ揃ったらカッコの外に出て，4 乗根の計算は，数字が 4 つ揃ったらカッコの外に出るといったルールである。

例題(5)は指数法則を利用しているので，難しいと感じる場合は 2 ページ後からの指数法則の計算に慣れてから再びチャレンジすると良い。

【問題】次の計算をしなさい。

1.　$27^{\frac{1}{3}} =$

2.　$8^{-\frac{1}{3}} =$

3.　$54^{\frac{1}{3}} =$

4.　$54^{-\frac{1}{3}} =$

5.　$\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} =$

6.　$\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

7.　$16^{\frac{1}{4}} =$

8.　$48^{\frac{1}{4}} =$

＜補足５＞ $\sqrt{2}$などの語呂合わせ

経済学では，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ の値を暗記していると，便利なことがある。

$$\sqrt{2} = \underline{1.4}1421356\cdots$$（一夜一夜に人見ごろ）
$$\sqrt{3} = \underline{1.7}320508\cdots$$（人並みにおごれや）
$$\sqrt{5} = \underline{2.2}360679\cdots$$（富士山麓オーム鳴く）

これらを暗記していれば，ルートを含む様々な計算結果に対して，おおよその値の見当がつくのである。上記の下線部（小数点第 1 位まで）を用いれば，例えば，

$$\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \fallingdotseq 1.4 \times 1.7 = 2.38$$（正確には約 2.45）
$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2 \times 1.4 = 2.8$$（正確には約 2.83）
$$\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5} \fallingdotseq 1.4 \times 2.2 = 3.08$$（正確には約 3.16）
$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \fallingdotseq 2 \times 1.7 = 3.4$$（正確には約 3.46）

となる。

＜補足５＞を参考にして，次の数の概算値を求めてみよう。

(1)　$\sqrt{20} =$

(2)　$\sqrt{30} =$

＜補足６＞ 大きな金額

経済学では大きな金額を扱うことが多い。例えば，日本の名目 GDP（国内総生産）は約 550 兆円といったようである。ここで，大きな数の表記方法を確認しておこう。

1,000,000 円，　100 万円，　10^6円，　1,000 千円

例えば，上記の金額はどれも 100 万円を表している。100 万円を 1000000 円と書くと，0 の数を数えるのが大変なので，3 ケタごとに「,（コンマ）」を書くことが多い。

また，1,000,000 には 0 が 6 つあるが，これは10^6と等しい。つまり，0 の数と指数の値が一致している。これを覚えていれば何かと便利であろう。また，例えば 200 万円であれば，

$$2 \times 10^6\text{円}$$

となる。

さらに，100 万円を表記する場合に，単位を「千円」とすれば，100 万円は 1,000 千円と表記できる。経済関連の統計資料を見る際には，単位が「千円」であったり「十億円」であったりするので注意が必要であろう（ちなみに，1 兆円は 1,000 十億円である）。

次の早見表を覚えておくと，大きな金額に惑わされたり，0 の数で混乱することが少なくなる。

［早見表］

1 千円	1,000 円	10^3円	thousand
1 万円	10,000 円	10^4円	10 thousand
100 万円	**1,000,000 円**	$\mathbf{10^6}$**円**	million
1 億円	100,000,000 円	10^8円	100 million
10 億円	**1,000,000,000 円**	$\mathbf{10^9}$**円**	billion
1 兆円	**1,000,000,000,000 円**	$\mathbf{10^{12}}$**円**	trillion
100 兆円	100,000,000,000,000 円	10^{15}円	100 trillion

表の一番右端を見ると，英語では「,（コンマ）」ごとに単語が変わっていくことがわかるだろう（太字は，暗記しておくと経済関連の統計資料を読む上で便利な箇所である）。

それでは，指数法則を用いた計算問題を解いていこう。ページをまたいだのでもう一度，指数法則を示しておく。

［指数法則］（再掲）

1. $x^a \times x^b = x^{a+b}$
2. $x^a \div x^b = x^{a-b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $(xy)^a = x^a y^a$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

【問題】次の計算をしなさい。

1. $x^2 \times x^2 = (x \cdot x) \times (x \cdot x) = x^{2+2} =$
2. $x^3 \times x^4 =$
3. $x^{-2} \times x^4 =$
4. $x^{0.5} \times x^{1.5} = x^{0.5+1.5} =$
5. $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} =$
6. $x \times x^{\frac{1}{2}} =$
7. $x^3 \times x^{-\frac{1}{3}} =$
8. $4x^2 \times 2x^2 = 4 \cdot 2x^{2+2} =$
9. $4x^2 + 2x^2 =$
10. $x^a \times x^b =$
11. $x^a \times x^a =$
12. $x^a + x^a =$
13. $x^4 \div x^2 = \dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x^{4-2} =$
14. $x^6 \div x^5 =$

15. $x^2 \div x^{-3} =$

16. $x^{0.5} \div x^{1.5} =$

17. $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{3}} =$

18. $x^2 \div x^{\frac{1}{2}} =$

19. $x^3 \div x^{-\frac{1}{3}} =$

20. $x^5 \div 2x^3 = \dfrac{x^5}{2x^3} =$

21. $8x^2 \div 2x^{\frac{1}{2}} =$

22. $\dfrac{4}{3}x^{-\frac{1}{4}} \div \dfrac{1}{2}x^2 =$

23. $x^a \div x^b =$

24. $2x^a \div x^a =$

25. $2x^a - x^a =$

26. $ax^b \div cx^d =$

27. $(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x^{2\times 3} =$

28. $(x^3)^5 =$

29. $(x^2)^{-2} =$

30. $(x^{-0.5})^{0.5} =$

31. $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

32. $(x^a)^b =$

33. $(x^a)^a =$

34. $(4x^3)^2 = 4x^3 \times 4x^3 = 4^2 x^{3\times 2} =$

35. $(ax^b)^c =$

36. $(-2x^3)^2 =$

37. $(2^2)^2 =$

38. $(4^3)^{\frac{1}{2}} =$

39. $8^{\frac{1}{3}} = (2 \times 2 \times 2)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} =$

40. $72^{\frac{1}{3}} = (2^3 \cdot 3^2)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} =$

41. $108^{\frac{1}{3}} =$

42. $32^{\frac{1}{3}} =$

43. $32^{\frac{1}{4}} =$

44. $8^{\frac{1}{2}} =$

45. $4^{\frac{3}{2}} =$

46. $8^{\frac{2}{3}} =$

47. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} =$

48. $\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{2x}{3y} \times \frac{2x}{3y} =$

49. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 =$

50. $\left(\frac{4x}{5y}\right)^{-2} = \left(\frac{5y}{4x}\right)^2 =$

51. $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

52. $\left(\frac{x^6}{y^3}\right)^{\frac{1}{3}} =$

53. $\left(\frac{9x^2}{16y^4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

54. $\left(\frac{2x^2}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

55. $\left(\frac{x^2y^3}{2z}\right)^2 \div \left(\frac{2x^3y}{z}\right)^3 =$

56. $\frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} =$

57. $\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}} =$

58. $\frac{0.5x^{-0.5}y^{0.5}}{0.5x^{0.5}y^{-0.5}} =$

59. $\frac{0.2x^{-0.8}y^{0.8}}{0.8x^{0.2}y^{-0.2}} =$

60. $\frac{\frac{2}{5}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}}} =$

次のような指数を含む方程式を解くことも経済学では多いので注意をしておこう。

- $x^{\frac{1}{3}} = 5$

  両辺を 3 乗して，$(x^{\frac{1}{3}})^3 = 5^3 \ \rightarrow\ x^{\frac{1}{3}\times 3} = 5^3 \ \rightarrow\ x = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

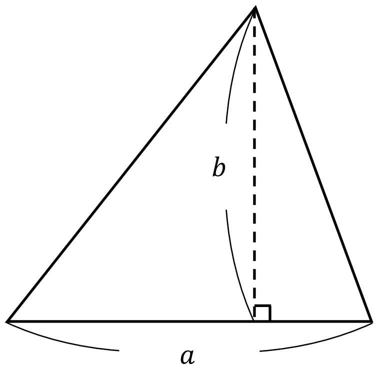
- $x^{-\frac{2}{3}} = 4$

  両辺を $-\frac{3}{2}$ 乗して，$(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}} \ \rightarrow\ x^{-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = (2^2)^{-\frac{3}{2}} \ \rightarrow\ x = 2^{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

6. 図形

ここでは，ミクロ経済学（の余剰分析）で登場する三角形や台形などの面積の求め方を確認しておく。授業をしていると台形の面積の公式を忘れている人をたまに見かけることがあるので，念のために確認をするわけであるが，簡単だと思う人は飛ばしてもらって構わない。

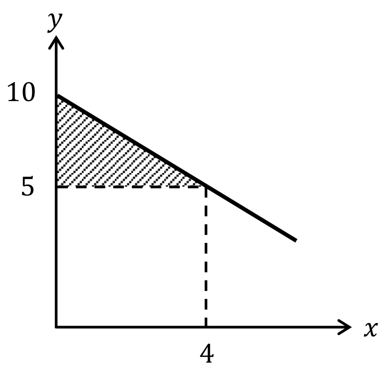
（1）三角形の面積



三角形の面積 $=$ 底辺$a \times$ 高さ$b \div 2$

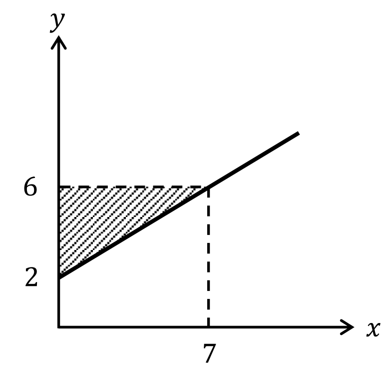
【問題】次の斜線部分の面積Sを求めなさい。

1.



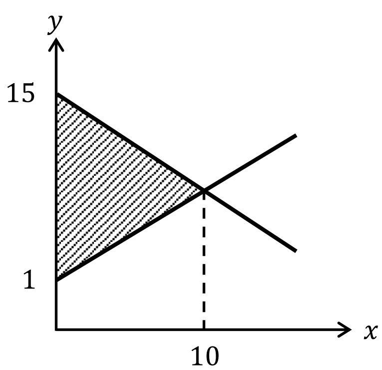
$S =$ ________

2.



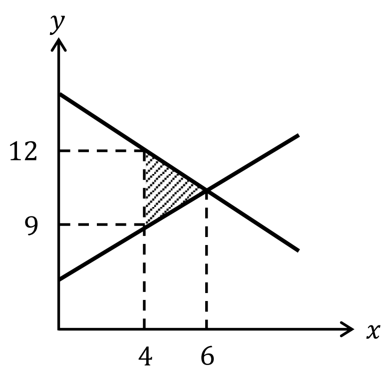
$S =$ ________

3.



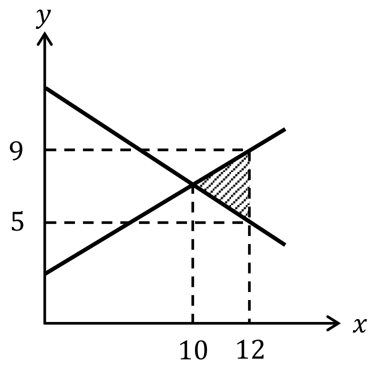
$S =$ ________

4.



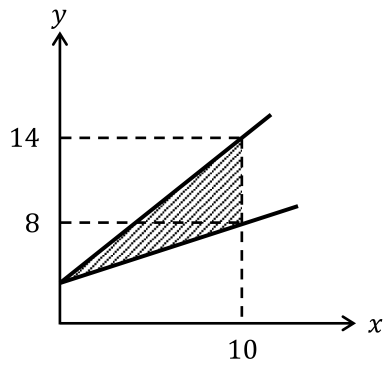
$S =$ ________

5.



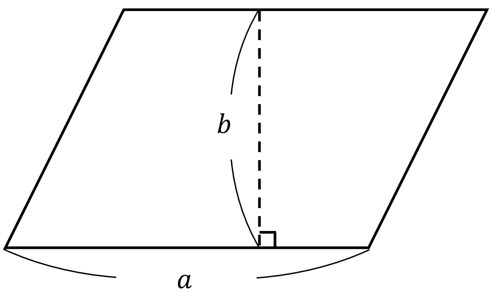
$S =$ ＿＿＿＿

6.



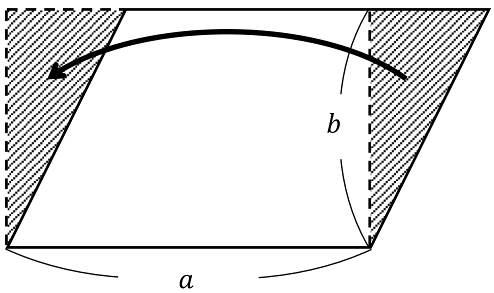
$S =$ ＿＿＿＿

（２）長方形・平行四辺形の面積



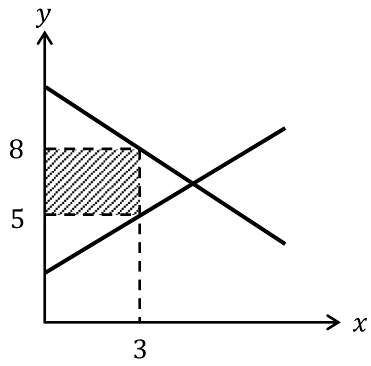
平行四辺形の面積 = 底辺a × 高さb

ちなみに，下図のように右端の直角三角形が，左端のスペースにぴったり入るので，平行四辺形の面積は長方形の面積（$S = a \times b$）と等しいことがわかる。



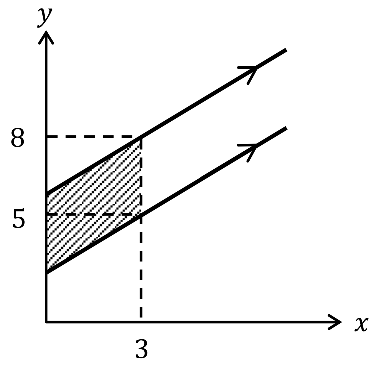
【問題】次の斜線部分の面積Sを求めなさい。

1.



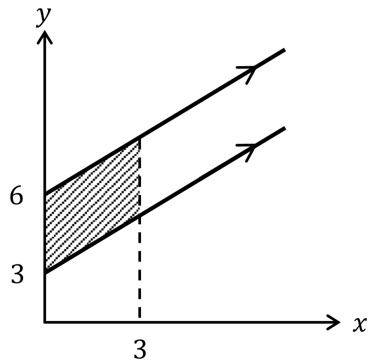
$S =$ ________

2.



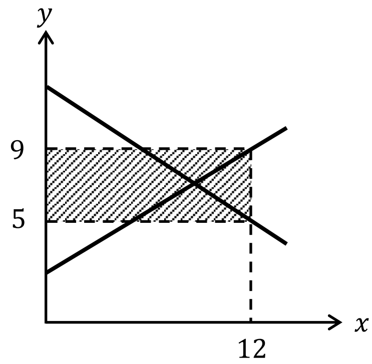
$S =$ ________

3.



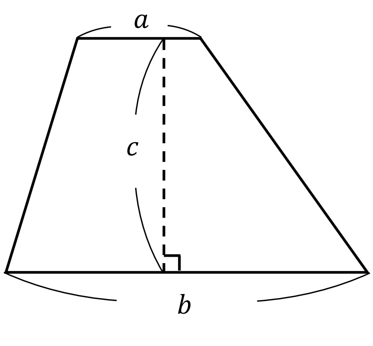
$S =$ ________

4.



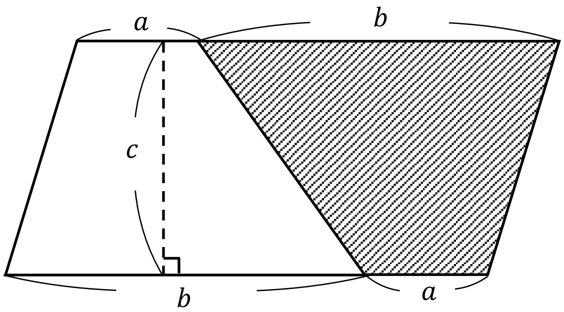
$S =$ ________

（3）台形の面積



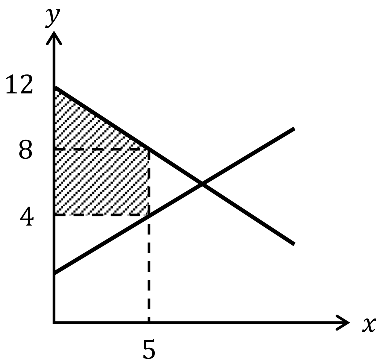
台形の面積 $= (\text{上底}a + \text{下底}b) \times \text{高さ}c \div 2$

次ページの図は，白い台形を反転させて，右側からくっつけた図を表しており，全体としては平行四辺形（面積$S = (a + b) \times c$）となっている。この半分（$\div 2$）の面積が白い台形の面積である。（授業動画とは説明の仕方を変えてみました）



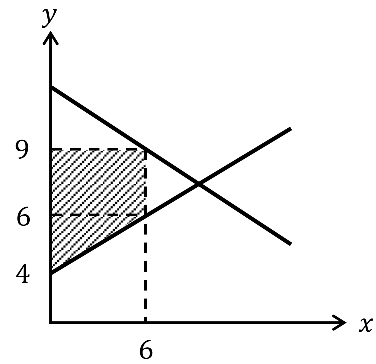
【問題】次の斜線部分の面積 S を求めなさい。

1.



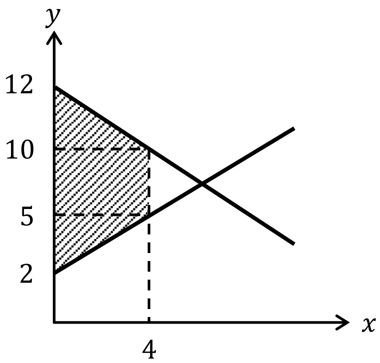
$S =$ ＿＿＿＿＿

2.



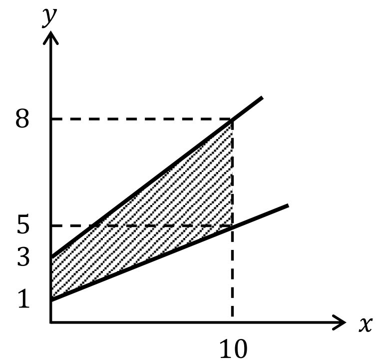
$S =$ ＿＿＿＿＿

3.



$S =$ ＿＿＿＿＿

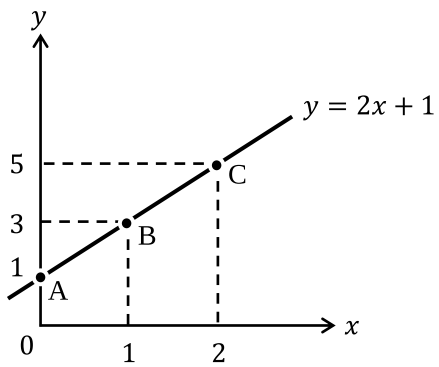
4.



$S =$ ＿＿＿＿＿

7. グラフ

$y = 2x + 1$ のグラフは，次のように書くことができる。



ところで，$y = 2x + 1$ の「2」が**傾き**であり，「1」が**切片**である。図中の点 A（の y 座標）が切片に相当する訳であるが，次のように丸暗記している人はいないだろうか？

「$y = 2x + 1$ の切片は 1 だから，直線は縦軸上の 1 を通る」

これはもちろん間違いではないが，次のことをしっかり意識しているだろうか。

「点 A は，直線 $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ が $\boldsymbol{x = 0}$ のときに通る点だから，$\boldsymbol{y = 2x + 1}$ の式に $\boldsymbol{x = 0}$ を代入すれば，切片である $\boldsymbol{y = 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1}$ が得られるんだ！」

このことを意識していないと，理屈を考えずにグラフの書き方だけを覚えているということになる。もう一度繰り返すが，

「点 A とは，直線 $y = 2x + 1$ が $x = 0$ のときに通る点である」

だから，$y = 2x + 1$ に $x = 0$ を代入すれば，$y = 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ となり，点 A の y 座標である 1 が得られる。これをしっかりと理解していれば，点 B と点 C に関しても同様に考えることができる。

「点 B とは，直線 $y = 2x + 1$ が $x = 1$ のときに通る点である」

だから，$y = 2x + 1$ に $x = 1$ を代入すれば，$y = 2x + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ となり，点 B の y 座標である 3 が得られる。

「点 C とは，直線 $y = 2x + 1$ が $x = 2$ のときに通る点である」

だから，$y = 2x + 1$ に $x = 2$ を代入すれば，$y = 2x + 2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ となり，点 C の y 座標である 5 が得られる。

次に，$y = 2x + 1$ の傾きについて考えていく。この直線の傾きは 2 であるわけだが，もちろん，この 2 という数値は直線の角度が「2°」であることを表しているわけではない。

傾きが 2 とは，

「右に 1 進んだとき，上に 2 あがる」

を意味しているのである。確かに，図中の点 A → 点 B → 点 C へと目を移していけば，右に 1 進んだときに上に 2 ずつあがっていくことが確認できるであろう。つまり，

「傾きとは，右に 1 進んだとき，上にいくつあがるか」

である。

経済学において，この傾きの意味を意識することは（非常に！）重要である。経済学の中核の分野である「ミクロ経済学」「マクロ経済学」「計量経済学」，これらいずれの分野においても，傾きは重要な役割を果たしている。

＜補足７＞ 計量経済学という分野

計量経済学という分野を初めて聞いた人も多いかもしれないが，これは統計学の方法を用いて経済理論が正しいかどうかを検証する分野である（人によっては，因果関係（原因と結果の関係）を明らかにすることを目的とする分野だという人もいるかもしれない）。

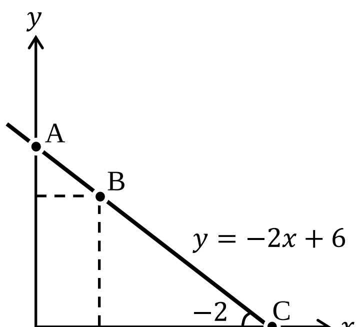
例えば，ミクロ経済学で「りんごの価格が上がれば，人々のりんごに対する需要は低下する」と主張されても，それが本当に正しいかどうかは検証しなければならない。そのためには，現実のデータを集めてきた上で，そのデータに対して統計学の方法を使って分析することで，りんごの価格が上がったときに，人々のりんごに対する需要が低下することを証明できるのである。このような分析をする分野が「計量経済学」なのである。

ミクロ経済学，マクロ経済学は**理論**分野であり，計量経済学は**実証**分野であることから，経済学者の世界では，「あなたの専門はミクロ？マクロ？計量？」と聞いたり，「あなたは理論をやってるの？実証をやってるの？」と聞いたりする。

ちなみに，資格試験などで計量経済学が必要となることはほとんどなく，国家公務員総合職試験（官僚になるための試験），大学院受験，学部編入学試験で出題を見かける程度である。

【問題】

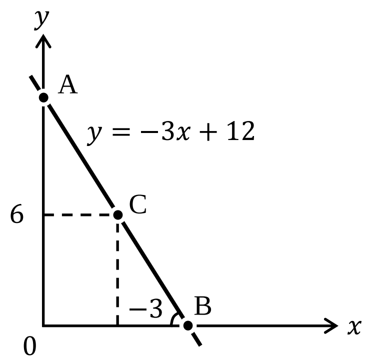
(1)　$y = -2x + 6$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. $y = -2x + 6$ の切片の値は（　　　）であり，これは図中における点 A の y 座標に相当する。この点においては，$x =$（　　　）であるので，これを $y = -2x + 6$ に代入すると，切片である $y =$（　　　）が得られる。ちなみに，この切片を y 切片（縦軸切片）と呼ぶこともある。

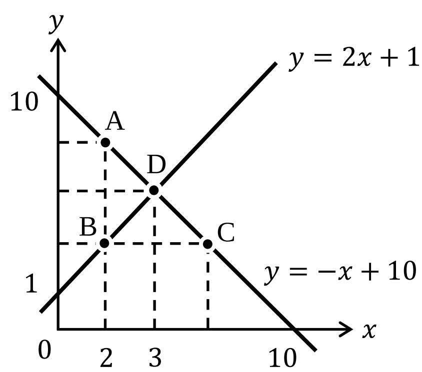
2. $y = -2x + 6$ の傾きは（　　　）であり，この意味は右に 1 だけ進んだとき，上に（　　　）だけ上がる，言い換えれば，下に（　　）だけ下がるということである。
3. 点 B は，$x = 1$ であるので，これを $y = -2x + 6$ に代入することで，点 B の y 座標である $y =$（　　）が得られる。点 A の y 座標（切片）が（　　）であったので，点 A から点 B へは，右に（　　）だけ進んで，下に（　　）だけ下がっていることから，直線の傾きが -2 であることが確認できる。
4. 点 C は，$y = 0$ であるので，これを $y = -2x + 6$ に代入することで，点 C の x 座標である $x =$（　　）が得られる。これを x 切片（横軸切片）と呼ぶこともある。

(2)　$y = -3x + 12$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. $y = -3x + 12$ の切片の値は（　　　）であり，傾きの値は（　　　）である。
2. 点 A の x 座標は（　　）であり，y 座標は（　　　）である。
3. 点 B の y 座標は 0 であるので，x 座標は（　　）である。
4. 点 C の y 座標は 6 であるので，x 座標は（　　）である。
5. $y = -3x + 12$ の x 切片の値は（　　）であり，y 切片の値は（　　　）である。

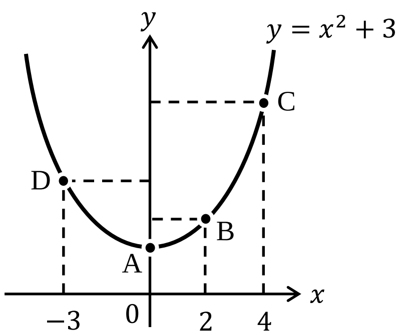
(3)　$y = 2x + 1$ と $y = -x + 10$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. 点 A の x 座標は 2 であるので，y 座標は（　　　）である。
2. 点 B の x 座標は 2 であるので，y 座標は（　　　）である。
3. 点 C の y 座標は点 B の y 座標と等しく（　　　）であるので，x 座標は（　　　）である。
4. 点 D の x 座標は 3 であるので，y 座標を求めるには $y = 2x + 1$ に $x = 3$ を代入するか，$y = -x + 10$ に $x = 3$ を代入すればよい。これより，点 D の y 座標は（　　　）と求まる。

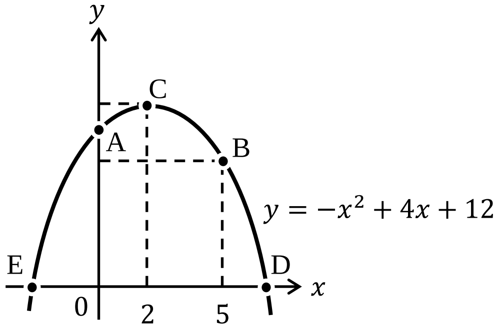
問題 4.の「点 D は 2 本の直線の**交点**であるので，どちらの直線の式に $x = 3$ を代入しても同じ y の値が求まる」ということは次節の連立方程式の分野で重要になってくる。

(4)　$y = x^2 + 3$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. 点 A のx座標は 0 であるので，$y = x^2 + 3$ の切片である点 A の y 座標は（　　　）である。
2. 点 B の x 座標は 2 であるので，点 B の y 座標は（　　　）である。
3. 点 C の x 座標は 4 であるので，点 C の y 座標は（　　　）である。
4. 点 D の x 座標は -3 であるので，点 D の y 座標は（　　　）である。

(5)　$y = -x^2 + 4x + 12$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. 点 A の x 座標は 0 であるので，$y=-x^2+4x+12$ に $x=0$ を代入することで，点 A の y 座標は（　　　）と求まる。
2. 点 B の x 座標は 5 であるので，$y=-x^2+4x+12$ に $x=5$ を代入することで，点 B の y 座標は（　　　）と求まる。
3. 点 C の x 座標は 2 であるので，$y=-x^2+4x+12$ に $x=2$ を代入することで，点 B の y 座標は（　　　）と求まる。
4. 点 D と点 E の y 座標は 0 であるので，$y=-x^2+4x+12$ に $y=0$ を代入して式を展開していくと，

$$
\begin{aligned}
&0=-x^2+4x+12\\
&-x^2+4x+12=0\\
&x^2-4x-12=0\\
&(x-6)(x+2)=0
\end{aligned}
$$

となり，この方程式の答えは $x=6$ と $x=-2$ であるので，点 D の x 座標が（　　　）であり，点 E の x 座標が（　　　）である。

この問題に書かれているグラフは，上に膨らんだ形（「**上に凸**」という）の放物線になっている。このような形の放物線になるためには，この問題の曲線

$$y=\underbrace{-x^2}_{2\text{ 次の項}}+4x+12$$

のように，2 次の項の符号がマイナスであれば，上に凸の放物線になるのである。つまり，$y=-x^2$，$y=-2x^2+3$，$y=-5x^2+10x$，$y=-x^2+4x+5$ はどれも上に凸の放物線になるということである。
次に，問題 3.で登場した点 C はグラフの**頂点**であるが，これは後の節「9. 微分」で重要になってくる。

また，問題 4.で，次の方程式 $(x-6)(x+2)=0$ の解（答え）が，$x=6,-2$ となったが，ここで一歩立ち止まって，なぜそのような解が得られるのか考えていこう。

まず，$x=6$ を $(x-6)(x+2)=0$ に代入してみる。

$$
\begin{aligned}
&(6-6)(6+2)=0\\
&0\cdot 8=0\\
&0=0
\end{aligned}
$$

これより，確かに等式が成り立っていることが確認できるので，$x=6$ は方程式 $(x-6)(x+2)=0$ の解である。

次に，$x=-2$ を $(x-6)(x+2)=0$ に代入してみる。

$$
\begin{aligned}
&(-2-6)(-2+2)=0\\
&-8\cdot 0=0\\
&0=0
\end{aligned}
$$

これより，確かに等式が成り立っていることが確認できるので，$x=-2$ も方程式 $(x-6)(x+2)=0$ の解であることがわかるのである。

問題 4.では**因数分解**が登場しているが，経済学でも（たまに）因数分解が登場することがある。ちなみに，問題 4.で登場した

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-6)(x+2) = 0$$

このような式変形が因数分解である。

因数分解は中学校で学ぶ内容であるが，（みなさんもたすき掛けを必死に練習した記憶があるかもしれないが）因数分解は多くの計算問題を解かないとなかなか慣れない。本来であればこの問題集でも新たな節を設けて，因数分解の練習問題をたくさん用意したいところであるが，因数分解の練習に疲れてしまって先に進めなくなるのも困るので（しかも，経済学では因数分解がそこまで頻出ではないため），＜補足８＞で手短に因数分解の説明をし，次ページの練習問題を解く程度にして先に進むこととする。

＜補足８＞ 因数分解

次の計算をしてみよう。

$$(1+2)(3+4)$$

これは，もちろん

$$(1+2)(3+4) = 3 \times 7 = 21$$

と解いてもいいが，次のように解いても同じ答えを得る。

$$(1+2)(3+4) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 4 + 6 + 8 = 21$$

これは，次の分配法則を使った解き方である。

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

ここで，a, b, c, d を次のように変更した式を考える。（$a = x, b = 2, c = x, d = 3$）

$$\underbrace{(x+2)(x+3)}_{①} = x^2 + 3x + 2x + 6 = \underbrace{x^2 + 5x + 6}_{②}$$

①から②への変形は「式の展開」であるが，②から①への変形が「因数分解」である。

つまり，

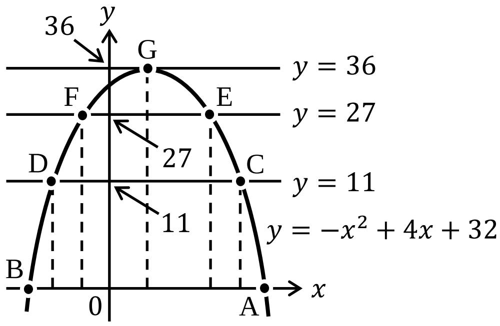
$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

この作業が因数分解である。

因数分解の例をいくつか挙げておく。（1.～12.まではすらすらと出来た方がよい）

1. $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$
2. $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$
3. $x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$
4. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
5. $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$
6. $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$
7. $x^2 - 12x + 20 = (x-2)(x-10)$
8. $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$
9. $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$
10. $x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$
11. $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$
12. $x^2 - 11x - 12 = (x-12)(x+1)$
13. $2x^2 + 10x + 12 = (x+3)(2x+4)$
14. $3x^2 - 16x + 5 = (x-5)(3x-1)$
15. $4x^2 + 2x - 6 = (2x+3)(2x-2)$
16. $12x^2 - 11x - 5 = (3x+1)(4x-5)$

【問題】$y=-x^2+4x+32$ のグラフに関する次の文章中の空所に適切な値や式を入れなさい。



1. 点 A と点 B の y 座標は 0 であるので，$y=-x^2+4x+32$ に $y=0$ を代入し，因数分解をすると，

$$0=-x^2+4x+32$$
$$-x^2+4x+32=0$$
$$x^2-4x-32=0$$
$$(x+（\quad）)(x-（\quad）)=0$$

となることから，点 A の x 座標は（　　），点 B の x 座標は（　　　）と求まる。

2. 点 C と点 D の y 座標は 11 であるので，$y=-x^2+4x+32$ に $y=11$ を代入し，因数分解をすると，

$$11=-x^2+4x+32$$
$$-x^2+4x+32=11$$
$$-x^2+4x+21=0$$
$$x^2-4x-21=0$$
$$（\qquad\qquad\qquad）=0$$

となることから，点 C の x 座標は（　　），点 D の x 座標は（　　　）と求まる。

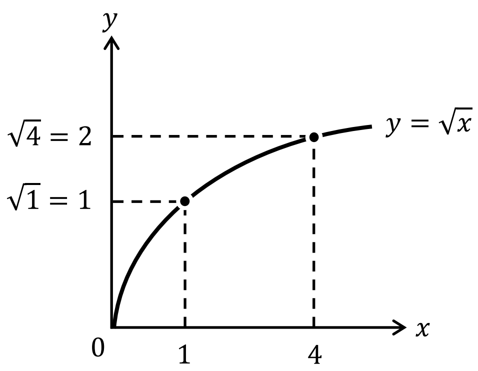
3. 点 E と点 F の y 座標は 27 であるので，点 E の x 座標は（　　），点 F の x 座標は（　　　）である。

4. 点 G の y 座標は 36 であるので，$y=-x^2+4x+32$ に $y=36$ を代入し，因数分解をすると，

$$36=-x^2+4x+32$$
$$-x^2+4x+32=36$$
$$-x^2+4x-4=0$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$（\qquad\qquad）=0$$

となることから，点 G の x 座標は（　　）と求まる。

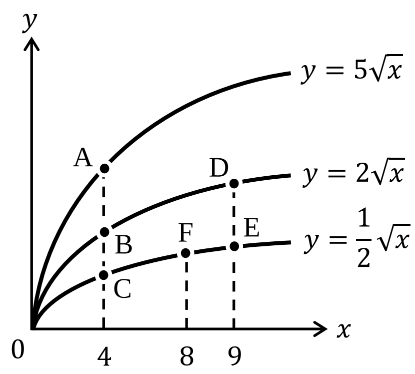
本節の最後に，ルートのグラフについても確認しておこう。



ルートのグラフが上図のような形状になることは覚えておいた方がよい。特にミクロ経済学ではルートのグラフがよく登場する。

それでは，ルートのグラフに慣れるために問題を解いておこう。

【問題】次の文章中の空所に適切な値を入れなさい。



1. 点 A の y 座標は（　　　）である。
2. 点 B の y 座標は（　　）である。
3. 点 C の y 座標は（　　）である。
4. 点 D の y 座標は（　　）である。
5. 点 E の y 座標は（　　）である。
6. 点 F の y 座標は（　　　）である。

8. 連立方程式

「なぜ今更，連立方程式！？」と思うかもしれないが，ミクロ経済学でもマクロ経済学でも連立方程式はよく登場するし，最先端の経済理論であっても，結局は連立方程式を（パソコンで）解いて，経済政策が日本の景気に与える影響を計算していることが多い。

それでは，中学校で習った連立方程式の解き方（**加減法**）をおさらいしておこう。

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \cdots ① \\ x - y = -2 & \cdots ② \end{cases}$$

これを解くには，例えば，②式の両辺を 2 倍して，

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & : ① \\ 2x - 2y = -4 & : ② \times 2 \end{cases}$$

この 2 本の式の両辺をたし算して，

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y = 14 & : ① \\ +)\ \underline{2x - 2y = -4} & : ② \times 2 \\ 5x \qquad = 10 & \\ x = 2 & \end{array}$$

$x = 2$ を得ることができる。（連立方程式を解くには，このように一方の変数がうまく消えるように工夫をして計算するのでした）

次に，$x = 2$ を①式，もしくは②式に代入することで，y の値を得ることができる。まず，$x = 2$ を①式に代入すると，

$$\begin{aligned} &3x + 2y = 14 \quad : ① \\ &3 \cdot 2 + 2y = 14 \\ &6 + 2y = 14 \\ &2y = 8 \\ &y = 4 \end{aligned}$$

よって，$y = 4$ が得られた。したがって，連立方程式の解は，$x = 2, y = 4$ である。

すでに答えは得られているが，$x = 2$ を②式に代入してみる。

$$\begin{aligned} &x - y = -2 \quad : ② \\ &2 - y = -2 \\ &-y = -4 \\ &y = 4 \end{aligned}$$

このように，②式を用いても同じ $y = 4$ を得ることができる。

なぜ，①式，②式のどちらに $x = 2$ を代入しても同じ y の値を得ることができたのだろうか。これを理解するには，連立方程式を解くということがそもそも何をしている作業なのかを理解する必要がある。結論から言うと，

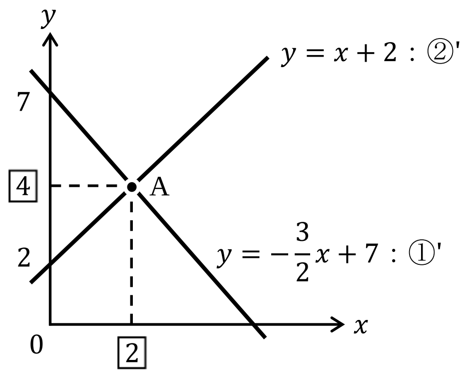
「連立方程式を解くことは，グラフの交点の座標を求めること」

なのである。どういうことなのか確認していこう。

まず，先程の①式と②式を「$y = \cdots$」の形に変形する。

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \rightarrow \quad 2y = -3x + 14 \quad \rightarrow \quad y = -\dfrac{3}{2}x + 7 \quad ：①' \\ x - y = -2 & \rightarrow \quad -y = -x - 2 \quad \rightarrow \quad y = x + 2 \quad ：②' \end{cases}$$

これをグラフに書くと次のようになる。



このグラフで注目してもらいたいのは交点 A である。この交点 A の座標は，

$x = 2, y = 4$（もしくは，$(x, y) = (2, 4)$ と書くこともある）

となっており，これは前ページで得られた連立方程式の解になっているのである。

これこそ，「連立方程式を解くことは，グラフの交点の座標を求めること」を意味しているのである。

また，①式，②式のどちらに $x = 2$ を代入しても同じ y の値を得ることができた理由についても，このグラフを見ればわかる。つまり，交点 A はグラフ①'の上に乗っており，グラフ②'の上にも乗っているので，$x = 2$ のときの高さ（つまり，交点 A の y 座標）は，グラフ①'で見ても，グラフ②'で見ても当然等しいのである。このことは，前節の問題(3)の 4.（p.26）でも触れたことである。

よって，連立方程式を解いたときに，一方の変数の値が得られたら，その値を元の連立方程式のどちらの式に代入しても，同じ答えが得られるのである。

＜補足９＞ 連立方程式が解ける条件

ここまで見てきた連立方程式は，式が 2 本，変数が 2 種類（x と y）であった。このように，連立方程式は，式の本数と変数の数がそろっていないと（基本的に）解くことができない。つまり，変数が 3 つ（例えば，x, y, z）あれば，連立方程式に含まれる式の数も 3 本ないと連立方程式が解けないということである。しかし，2 直線が平行であれば，式が 2 本，変数が 2 種類であっても，連立方程式が解けない（言い換えると，交点がない）という特殊な例もあることには注意する必要がある。例えば，次の連立方程式を解こうとしても，x と y の値が求まらないことがわかる。2 直線は平行なので，交点が存在するはずがないのである。（もし，2 直線がぴったり重なっていたら，交点は無数にあることになる）

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \quad ：2 \text{ 直線が平行であるケース}$$

ここまで，中学校で学んだ連立方程式の解き方を復習してきたが，経済学の問題を解いていて，連立方程式を先程のような解き方を用いることは少ない。実際によく使う連立方程式の解き方は次の 2 つである。

［方法①］右辺どうしをくっつける方法　← 正確には，代入法という

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} y = 2x + 1 & \cdots ① \\ y = -x + 10 & \cdots ② \end{cases}$$

これを簡単に解くには，①式と右辺と，②式の右辺に注目し，

$$\begin{cases} y = \boxed{2x + 1} & \cdots ① \\ y = \boxed{-x + 10} & \cdots ② \end{cases}$$

これら右辺どうしをイコールでくっつけてみる。

$$2x + 1 = -x + 10$$

これを解けば x が求まる。

$$2x + x = 10 - 1$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

どうだろか。いとも簡単に連立方程式の解である x の値が求まった。（y の値は，$x = 3$ を①式，もしくは②式に代入すれば $y = 7$ と求まる）

この右辺どうしをくっつける方法を用いることができる理由は次の通りである。

下の①式と②式の左辺はどちらも y で等しいので，

$$\begin{cases} \boxed{y} = 2x + 1 & \cdots ① \\ \boxed{y} = -x + 10 & \cdots ② \end{cases}$$

右辺どうしも等しいというわけである。（より正確には，交点においては①式も②式も同じ y の値になるので，右辺どうしも等しくなると考える）

ところで，この方法で簡単に解けたというが，そもそも問題自体が「$y = \cdots$」の形になっていて，右辺どうしをくっつけることができる形になっているから，簡単に解けただけじゃないか！？と思った人もいるかもしれない。しかし，経済学の計算問題を解いていると，このような右辺どうしをくっつければ解けるという形の連立方程式が登場することが多いのである。そのため，この［方法①］を知っていれば，連立方程式がいとも簡単に解けてしまうというわけである。

ところで，この［方法①］は正確には**代入法**というが，なぜそのような名前がついているのかと言うと，例えば，①式の $y = 2x + 1$ を，②式の y に**代入**することで，右辺どうしをくっつけた形である

$$2x + 1 = -x + 10$$

が得られているからである。

［方法②］代入法

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} y = 2x + 6 & \cdots ① \\ x = y - 5 & \cdots ② \end{cases}$$

これも解き方は簡単で，②式を①式の中の x に代入すればよいのである。代入してみると，

$$y = 2x + 6$$
$$y = 2(y - 5) + 6$$
$$y = 2y - 10 + 6$$
$$-y = -4$$
$$y = 4$$

そして，この $y = 4$ を①式，もしくは②式に代入すれば，$x = -1$ が得られる。

この連立方程式の形も，問題自体が簡単なので，簡単に解けて当然だと思うかもしれないが，この連立方程式の形はマクロ経済学の 45 度線分析や IS－LM 分析という分野でよく出てくる形なのである。（p.65 の問題 12.を参照）

このように，経済学では連立方程式をよく用いるが，計算問題で連立方程式を解く作業自体はそれほど難しくないのである。

【問題】次の連立方程式を解きなさい。

1.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

$x =$ 　　　　$, y =$

2.

$$\begin{cases} 5x - 3y = -5 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

$x =$ 　　　　$, y =$

3.

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$x =$ 　　　　$, y =$

4.

$$\begin{cases} y = x + 12 \\ y = -2x + 30 \end{cases}$$

$x =$ 　　　　$, y =$

5.

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

6.

$$\begin{cases} y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

7.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = ax + 3 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

8.

$$\begin{cases} y = x - a \\ y = bx + 2 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

9.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

10.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y + \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

$x =$ ______ $, y =$ ______

＜補足１０＞ 内生変数と外生変数

経済学を勉強していると，内生変数と外生変数という言葉が登場して，

内生変数：モデル**内**で決まる変数

外生変数：モデルの**外**で決まる変数

といったような説明はあるが，さっぱり意味がわからないという状況に陥る（私自身がそうであった。ここは丁寧に書かないとなかなか伝わらないとこであると思うので，長文になることをご容赦いただきたい）。

まず，おおまかに説明してしまうと，次のような連立方程式を考えたときに，

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

横軸や縦軸に相当する x, y が内生変数であり，a, b, c, d が外生変数であると考えればわかりやすい（後で説明するように，a, b, c, d のどれかは外生変数ではなく定数かもしれない）。

しかし，これでは正確な説明ではないので，まずはそもそも「モデル」とは何かを考えていく。（以下，第 1 講で学ぶ需要曲線と供給曲線の内容を含むので，需要曲線と供給曲線の内容を学んでから，読んだ方がいいだろう）

モデルとは「模型」のことであり，実物を再現したものを意味する。例えば，プラモデルというと，プラスチックで実物を再現した模型のことである。では，経済学でモデルというと何を意味するのだろうか？もちろん，経済にはそもそも実体がないので，プラモデルを作るなんてことは不可能である。

今，りんごの需要関数が，（詳細は第 1 講へ）

$$x = 12 - P \qquad (x：りんごの需要量（個），P：りんごの価格（円）)$$

であるとする。

この需要関数より，りんごの価格が $P = 10$ 円であれば，りんごを $x = 12 - 10 = 2$ 個だけ欲しいということが読み取れる。つまり，りんごの需要関数 $x = 12 - P$ は，人々のりんごに対する「需要」と「価格」の関係が数式によって表された模型（モデル）になっているのである。ということで，りんごの需要関数 $x = 12 - P$ はモデル（**経済モデル**，もしくは**数理モデル**）なのである。

次に，以下の連立方程式（りんごに対する**需**要と**供**給の関係を表したモデル。ここではこの連立方程式を需給モデルと呼んでおく）を解くと，

$$\begin{cases} x = 12 - P & ：需要関数 \\ x = 2P & ：供給関数 \end{cases}$$

均衡価格 $P^* = 4$，均衡数量 $x^* = 8$ が得られる。このように連立方程式（需給モデル）を解くことで P と x が得られたので，P と x は縦軸と横軸に相当し，モデル内で決まる変数である内生変数だということがわかる。

次に，需要関数を $x = 12 - P + a$ に修正したとする。この a は政府が買い取るりんごの量（政府のりんごに対する需要量）だとしよう。これより，連立方程式は次のように修正される。

$$\begin{cases} x = 12 - P + a & ：（政府の需要を含む）需要関数 \\ x = 2P & ：供給関数 \end{cases}$$

解くのが少し面倒になったが，この連立方程式を解くと，

$$P^* = 4 + \frac{1}{3}a, \quad x^* = 8 + \frac{2}{3}a$$

と得られる。a は政府が買い取るりんごの量であり，この値は政策的に変更できるとすると，政府が $a = 3$ 個だけりんごを買い取れば，

$$P^* = 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5, \quad x^* = 8 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 10$$

というように，均衡価格と均衡数量が決定する。

仮に，政府が $a = 6$ 個だけりんごを買い取れば，

$$P^* = 4 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 6, \quad x^* = 8 + \frac{2}{3} \cdot 6 = 12$$

というように，新しい均衡価格と均衡数量が決定する。

このように考えれば，政府が買い取るりんごの量 a は，政策的に決定される値となり，モデルの外で決定される外生変数となるのである。つまり，a は政策的に決定された後に，連立方程式（需給モデル）が解かれて P^* と x^* が求まるので，a は変数ではあるが，（需給）モデルの外で決められていることになるのである。

次に，需要関数を $x = 12 - P + a + b$ に修正したとする。a は先程と同じ政府が買い取るりんごの量であるが，b は海外に輸出するりんごの量（外国人にとっては日本産のりんごに対する需要量）であり，決まった量（一定量）だけ輸出すると仮定する。これより，連立方程式は次のように修正される。

$$\begin{cases} x = 12 - P + a + b & ：（政府と海外の需要を含む）需要関数 \\ x = 2P & ：供給関数 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，

$$P^* = 4 + \frac{1}{3}(a + b), \quad x^* = 8 + \frac{2}{3}(a + b)$$

というように，均衡価格と均衡数量が決定する。

ところで，b は海外に輸出するりんごの量で，決まった量だけ輸出すると仮定されているので，モデルの外で決まる値ではあるが**定数**である。つまり，b は外生変数ではなく定数であることに注意しなければならない。

ここまでの内容をまとめると，以下の需給モデルにおいて，

$$\begin{cases} x = 12 - P + a + b & ：需要関数 \\ x = 2P & ：供給関数 \end{cases}$$

（x：りんごの数量，P：りんごの価格，
a：政府が買い取るりんごの量，b：海外に輸出するりんごの量）

x, P は内生変数，a は外生変数，b は定数ということになるのである。

（これでも外生変数と定数の違いに混乱している人もいるかもしれないので追記しておくが，外生変数と定数の違いは，値を変化「させる」のが外生変数，値が変化「しない」のが定数，と理解しておけばよい）

9. 微分

ミクロ経済学では「微分」が（ものすごく）頻繁に登場する。ミクロ経済学を理解するために微分の知識は必要不可欠である。

しかし，「微分」と聞くと難しいイメージがあって，「自分には理解できるはずがない…」と逃げたくなる人もいるかもしれない。でも大丈夫！微分はとても簡単なのだ。

次の例題を見て欲しい。

【例題】次の式を x で微分しなさい。

(1) $y = 5x$ （解答）$y' = 5$

(2) $y = 10x$ （解答）$y' = 10$

(3) $y = x$ （解答）$y' = 1$

(4) $y = -2x$ （解答）$y' = -2$

(5) $y = -ax$ （解答）$y' = -a$ ← aは定数とする

(6) $y = 3$ （解答）$y' = 0$

(7) $y = 9$ （解答）$y' = 0$

(8) $y = b$ （解答）$y' = 0$ ← bは定数とする

(9) $y = -4$ （解答）$y' = 0$

(10) $y = -1$ （解答）$y' = 0$

(11) $y = 2x + 1$ （解答）$y' = 2 + 0 = 2$

(12) $y = 5x + 10$ （解答）$y' = 5 + 0 = 5$

(13) $y = -2x + 5$ （解答）$y' = -2 + 0 = -2$

(14) $y = -x - 3$ （解答）$y' = -1 + 0 = -1$

(15) $y = ax + b$ （解答）$y' = a + 0 = a$

＊ 「定数とする」: 値の決まった数字として扱うこと

この例題から微分には法則があることがわかるだろう。この例題からは 2 つの法則（**① x にかけ算されている数字は残る，②数字だけなら 0 になる**）に気付くはずだ。

ここで，微分をする上でもう一つ覚えてもらいたい法則がある。その法則を理解するには次の手順をゆっくりと追ってほしい。

Step1 $y = 4x^3$ を x で微分する

Step2 微分を始めるので，とりあえず「$y' =$」と書く

$$y' =$$

Step3 次に，$y = 4x^3$ にある数字の 3 を，4 にかけ算する

$$y' = 4 \times 3$$

Step4 そして，3 乗の部分を「引く 1」する

$$y' = 4 \times 3x^{3-1}$$

Step5 最後に式を整理して完成！

$$y' = 12x^2$$

この法則を一般的に書くと次のようになる。

$$y = ax^b \quad \rightarrow \quad \boxed{y' = abx^{b-1}}$$

それでは，この法則に慣れるために，次の例題を上から見ていって欲しい。

【例題】次の式を x で微分しなさい。

(1)　$y = 2x^3$　（解答）$y' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2$

(2)　$y = 10x^4$　（解答）$y' = 10 \times 4x^{4-1} = 40x^3$

(3)　$y = x^3$　（解答）$y' = 1 \times 3x^{3-1} = 3x^2$　← 元の式を$y = 1x^3$と考える

(4)　$y = x^2$　（解答）$y' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$

(5)　$y = -5x^3$　（解答）$y' = -5 \times 3x^{3-1} = -15x^2$

(6)　$y = -x^4$　（解答）$y' = -4x^{4-1} = -4x^3$

(7)　$y = -3x^2$　（解答）$y' = -3 \times 2x^{2-1} = -6x$

(8)　$y = 6x^3 + 1$　（解答）$y' = 18x^2 + 0 = 18x^2$

(9)　$y = x^2 + 10$　（解答）$y' = 2x + 0 = 2x$

(10) $y = x^2 + 3x + 5$　（解答）$y' = 2x + 3 + 0 = 2x + 3$

(11) $y = -3x^2 - 4x + 1$　（解答）$y' = -6x - 4 + 0 = -6x - 4$

(12) $y = -5x^3 + 2x^2$　（解答）$y' = -15x^2 + 4x$

(13) $y = x^3 - 2x - 10$　（解答）$y' = 3x^2 - 2$

(14) $y = x^2 - x - 2$　（解答）$y' = 2x - 1$

(15) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5$　（解答）$y' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$

ところで，$y = 4x^3$ を x で微分すると，$y' = 12x^2$ になると書いた。しかし，経済学では y' の代わりに $\frac{dy}{dx}$ と表現することの方が多い。つまり，

$$y = 4x^3 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx}} = 12x^2$$

と答えた方がいいということである。

$\frac{dy}{dx}$ とは，**「$y = \cdots$」の式をxで微分する**ということを表しており，読み方は「ディーワイ・ディーエックス」（「ディーエックス分のディーワイ」とは読むのは間違い）である。

y' という記号を使う方がシンプルであるので，なぜ，$\frac{dy}{dx}$ という書き方が経済学で好まれるのかというと，経済学では変数に用いるアルファベット（A, a, B, b, …）や**ギリシャ文字**（アルファα，ベータβ，ガンマγ など）が数多く登場するので，どの変数で微分をしたのかを明らかにする必要がある。例えば，次の例を見て欲しい。

$$z = 2a + 3b + 3c \quad \rightarrow \quad z' = 3$$

これより，「$z = \cdots$」の式を b か c のどちらかで微分したのだろうと予想はつくが，b と c のどちらの文字で微分をしたのかはわからない。しかし次のように書けば，c で微分したことがわかるのである。

$$z = 2a + 3b + 3c \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dc} = 3$$

それでは，問題に入る前に，微分の計算法則をまとめておく。（a, b は定数とする）

微分法則①　$y = ax^b \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = abx^{b-1}$

微分法則②　$y = ax \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = a$

微分法則③　$y = a \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 0$

この3つを覚えておけば，基本的な微分の計算で困ることはないだろう。

【問題】次の式を x で微分しなさい。ただし，a, b, c, d は定数とする。

1. $y = 4$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

2. $y = a$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

3. $y = -5a$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

4. $y = 2a + 1$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

5. $y = a^2 + 3a - 4$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

6. $y = 2x$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

7. $y = -3x$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

8. $y = -x$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

9. $y = ax$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

10. $y = (a + 1)x$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

11. $y = 2x + 3$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

12. $y = -x - 5$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

13. $y = \dfrac{2}{5}x + 4$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

14. $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

15. $y = \dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{d}$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

16. $y = 5x^4$
$\dfrac{dy}{dx} = 5 \times 4x^{4-1} =$ ＿＿＿＿

17. $y = 3x^3$
$\dfrac{dy}{dx} = 3 \times 3x^{3-1} =$ ＿＿＿＿

18. $y = 4x^2$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

19. $y = x^2$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

20. $y = ax^2$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

21. $y = 2x^2 + 3$
$\dfrac{dy}{dx} = 2 \times 2x^{2-1} + 0 =$ ＿＿＿＿

22. $y = 4x^2 - 5x + 1$
$\dfrac{dy}{dx} = 4 \times 2x^{2-1} - 5 + 0 =$ ＿＿＿＿

23. $y = 5x^4 + 2x^2 + 5$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

24. $y = -x^2 + 3x - 4$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

25. $y = x^3(3x - 1)$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

26. $y = 2x(3x - 1) + 4$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

27. $y = ax^3 - bx^2 + cx - d$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

28. $y = -3x^2 + (2a + 1)x - b$
$\dfrac{dy}{dx} =$ ＿＿＿＿

*

29. $y = (4a+3)x^2 - bx + c$

$\frac{dy}{dx} =$

30. $y = 2(x^2 - x - 1)$

$\frac{dy}{dx} =$

31. $y = a^3 + 4xa^2 + 3a + 5$

$\frac{dy}{dx} =$

32. $y = abcdx$

$\frac{dy}{dx} =$

ここで，ミクロ経済学で頻出する少し難しめの微分についても触れておこう。

次のルートを含む式を x で微分してもらいたい。

$$y = \sqrt{x}$$

これは一体どうすれば微分できるのだろうかと思うかもしれないが，次のように変形してみよう。

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

このように変形すれば，前ページの微分法則①を用いて次のように計算できる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \underbrace{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}_{①} = \underbrace{\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}_{②} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{③} = \underbrace{\frac{1 \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}}_{\text{有理化}} = \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{2x}}_{④}$$

この式を見ると，「一体どこまで計算すればいいのか？」と思うかもしれないが，上の式の①，もしくは③で止めることが多い。(②は式の形として，分母がごちゃごちゃしていて不格好であるし，④まで有理化する必要は特にない。もちろん，②や④の形で答えても正解である)

このようにルートを含む式の微分は，はじめは難しく感じるが，何度か同じような計算をしているうちに次第に慣れてくる。それでは，問題を解いて慣れていこう。

【問題】次の式を x で微分しなさい。

1. $y = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} =$

2. $y = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} =$

3. $y = 4\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} =$

4. $y = 9\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} =$

5. $y = x^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx} =$

6. $y = 3x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{dx} =$

7. $y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} =$

8. $y = x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx} =$

＜補足１１＞ 経済学でよく使われるギリシャ文字一覧

経済学では，アルファベットやギリシャ文字が数多く登場するということであったが，ここでは経済学でよく使われるギリシャ文字をまとめておく。ギリシャ文字はアルファベットともある程度対応していることや，ギリシャ文字にもアルファベットと同様に大文字と小文字の区別があることも知っておくといいだろう。経済学を勉強する上で重要度の高い箇所は太字（ボールド）にしており，重要性の低い箇所は空所にしているので，気になる人は自身で検索してもらいたい。

読み方	小文字	大文字	対応するアルファベット	読み方	小文字	大文字	対応するアルファベット
アルファ	$\boldsymbol{\alpha}$	A	**a**	**パイ**	$\boldsymbol{\pi}$	Π	**p**
ベータ	$\boldsymbol{\beta}$	B	**b**	**ロー**	$\boldsymbol{\rho}$		
ガンマ	$\boldsymbol{\gamma}$	Γ	g	**シグマ**	$\boldsymbol{\sigma}$	Σ	s
デルタ	$\boldsymbol{\delta}$	**Δ**	**d**	タウ	τ		t
イプシロン	$\boldsymbol{\varepsilon}$	E	**e**	**ファイ**	$\boldsymbol{\phi}$	Φ	
イータ	η			カイ	χ		
シータ	θ			**プサイ**	$\boldsymbol{\psi}$	Ψ	
ラムダ	$\boldsymbol{\lambda}$	Λ		オメガ	ω	Ω	
ミュー	μ						

ここまで問題を解いてきた人であれば，微分の計算に慣れてきたと思うが，そもそも，微分とは何なのだろうか？微分の計算ルールを覚えて，そのルールに従って計算ができたのはいいが，微分をすることの意味とは一体何なのだろうか。

結論から言うと，

「微分とは，接線の傾きを求めること」

である。

微分初心者の人は，微分は「傾き」を求めること！と理解しておくとよい。

では，微分とは本当に傾きを求めることなのかを確認する。まず，

$$y = 2x + 1$$

この式の傾きは「2」である。ではこの式を微分してみよう。

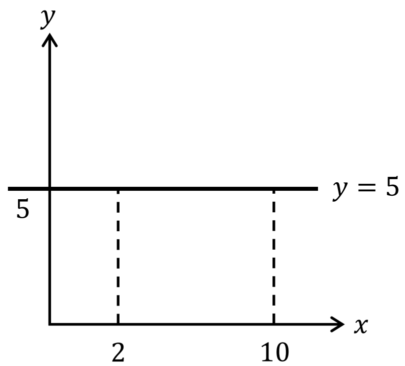
$$y = \underbrace{2}_{\text{傾き}} x + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \underbrace{2}_{\text{傾き}}$$

確かに，微分をすることで傾きである「2」が得られていることがわかる。

では，次の例だとどうだろうか。

$$y = 5$$

この $y = 5$ という式をあえてグラフに書いてみる。（$y = 5$ なんてグラフに書けるの？と思う人もいるかもしれないが下のように書くことができる）



この中に書かれている水平線が $y = 5$ のグラフである。なぜ，$y = 5$ が水平線になるのかというと，「$y = 5$」という式の中には x が見当たらない。これは，x がどのような値であっても，y の値が5になるということである。例えば，$x = 2$ のときも $y = 5$ であるし，$x = 10$ のときも $y = 5$ ということである。

ところで，このような水平線の傾きはいくつになるだろうか。結論を言ってしまうと，

「水平線の傾きは 0 である」

なぜなら，傾きとは「右に 1 進んだとき，上にいくつあがるか」であったが，水平線は，水平であるので，右に 1 進んでも上にも下にも上がったり下がったりしない。つまり，

「水平線上では，右に 1 進んだとき，上に 0 あがる」

と考えれば，水平線の傾きは 0 というわけである。

では，ここで $y = 5$ を微分してみよう。

$$y = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \underbrace{0}_{\text{傾き}}$$

やはり，微分をすると水平線の傾きが得られるのである！

これで，微分が傾きを求める作業であることがわかってきたかと思うが，次の例を見てみよう。

$$y = x^2$$

この式を微分すると，

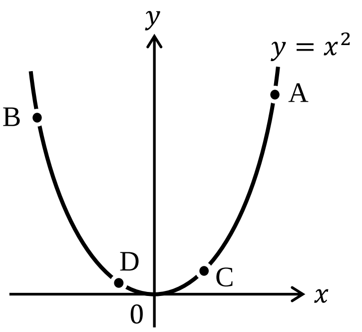
$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \underbrace{2x}_{\text{傾き？}}$$

$2x$ が得られる。これは傾きなのだろうか？先程は，

$$y = 2x + 1 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \underbrace{2}_{\text{傾き}} \qquad\qquad y = 5 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \underbrace{0}_{\text{傾き}}$$

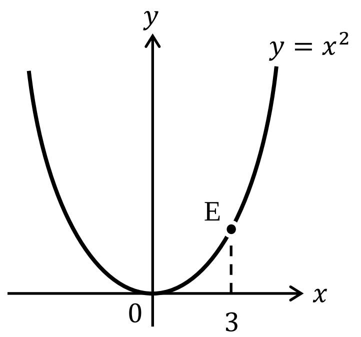
というように数値で傾きが得られていたが，今回求めた $2x$ は傾きなのだろうか？

　ここで，$y = x^2$ をグラフで書いてみる。



　当然ではあるが，$y = x^2$ は放物線なので曲線である。曲線は場所によって傾きが違ってくる。例えば，上図の点 A や点 B ではグラフは垂直に近く，傾きはかなり急である。しかし，点 C や点 D ではグラフは水平に近く，傾きはかなり緩やかである。

　つまり，曲線の傾きはグラフ上の場所によって違ってくるのである。ここで，下図の点 E での傾きを考えてみよう。



点 E には「x 座標が 3（$x = 3$）」という情報がある。この情報だけで，点 E のグラフ上の場所が確定しているのである。ここで，$y = x^2$ を微分した結果に $x = 3$ を代入してみる。

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x = 2 \cdot \boxed{3} = 6$$

得られた 6 こそが点 E における傾きなのである！

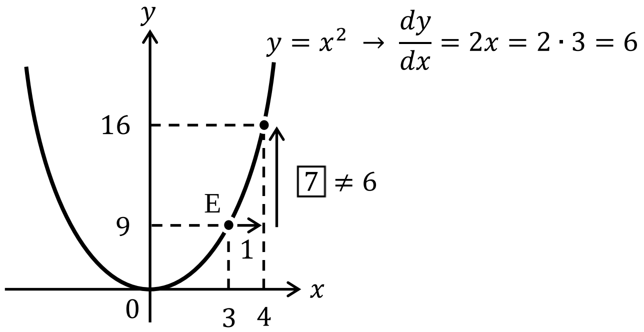
　つまり，$y = x^2$ を微分することで得られた

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$2x$ とは，x に値を代入して（言い換えると，点の位置を確定して）初めて傾きの数値が確定するのである。（説明の仕方を変えると，$y = x^2$ は曲線であるから，微分しても確定した数値（傾き）が得られず，$2x$ というように x が含まれたままになっていたのである）

　ここでもう少し，微分に対する理解を深めてみる。

　先程，点 E では傾きが 6 と得られたわけであるが，本当に傾きが 6 なのか次の図を使って確かめてみる。

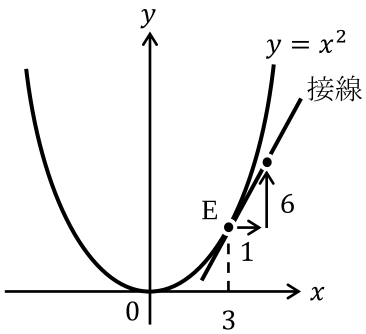


上図を見ると，点 E から右に 1 進むと，上に 7 あがるという事実が判明する。ここで，あれ！？と思うのである。なぜなら，前ページで点 E での傾きは 6 と求まっていたので，点 E から右に 1 進むと，上に 6 あがるはずなのである。

では，「微分をすれば傾きが求まる」ということが間違いであったのかといえば，そうではない。次の文章を思い出そう。

「微分とは，接線の傾きを求めること」

だったのである。そこで，接線というものを図中に加えてみる。



上図の中で接線とあるが，この**接線**とは，点 E を通り，$y = x^2$ のグラフにちょうど接するような直線である。

実は，この接線の傾きが 6 であり，微分とはこのような接線の傾きを求めていることになるのである！（ちなみに，元のグラフが直線であれば，接線と直線がぴったり重なってしまうので，微分をして得られた傾きが直線の傾きになっているのである）

初めて微分を学んだ人にとって，ここまでかなり難しい話であったのではないだろうか。一回聞いただけでは，「わかったような，わからないような…」という感覚になっているのではないかと思う。そうなっている場合は，とりあえずここは「微分とは傾きを求めることだ！」と割り切ってしまって次に進み，問題を解く中で少しずつ理解を深めていくことをおすすめする。

それでは問題を解いていこう。

＜補足１２＞ 接線は一本だけ！

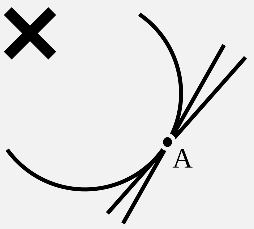
以前，学生から受けた質問で印象に残っている質問がある。

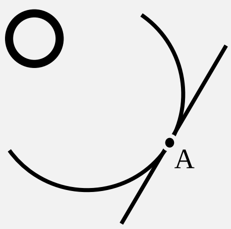
「接線って，先生のさじ加減じゃないですか？」

これを聞いたとき，質問の意図がわからなかった。しかし，その学生とやり取りしているうちに質問の意味がわかってきた。図で表すとこういうことだ。

左下図を見て欲しい。左下図は点 A において接線が 2 本書いてある。どちらも正しい接線に見えるので，接線は何本も書けるように思えてくる。しかしそれは間違いだ。

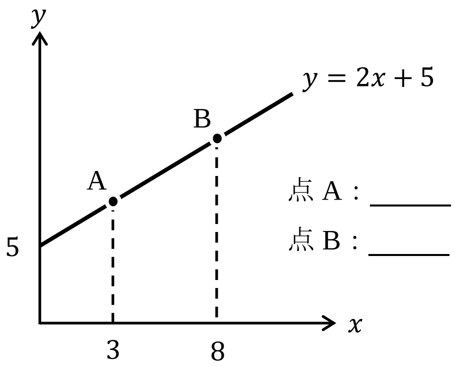
正しくは，右下図のように点 A において接線は 1 本しか書けない。なぜかを理解するために，右下図の曲線はものすごく堅い板が曲がったものだとしよう。そして，接線に相当する直線も堅い木の棒としよう。そうすると，右下図の状況は曲がった堅い板に，木の棒がピタっと点 A で接していると見なせる。ここで，木の棒の角度を少し変えてみる。そうすると接している点はすぐに点 A から離れてしまうだろう。このことから曲線上の 1 点に対して，接線は 1 本だけしか書けないことがわかるのである。





【問題】空所にグラフ上の各点における（接線の）傾きを書き入れなさい。

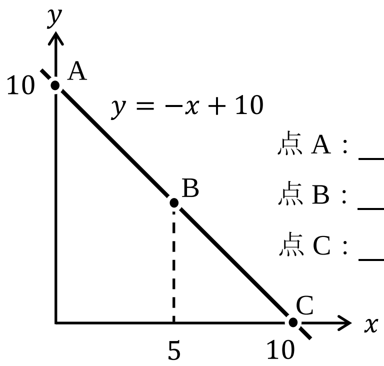
1.



点 A：______

点 B：______

2.

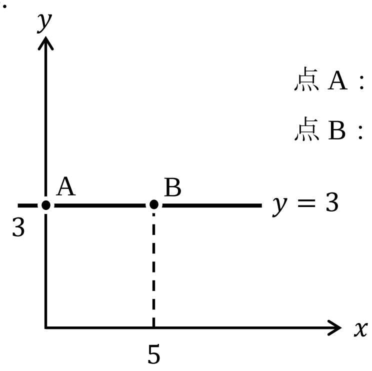


点 A：________

点 B：________

点 C：________

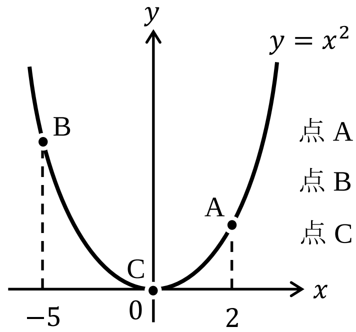
3.



点 A：______

点 B：______

4.

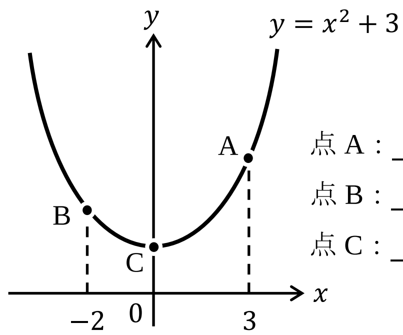


点 A：________

点 B：________

点 C：________

5.

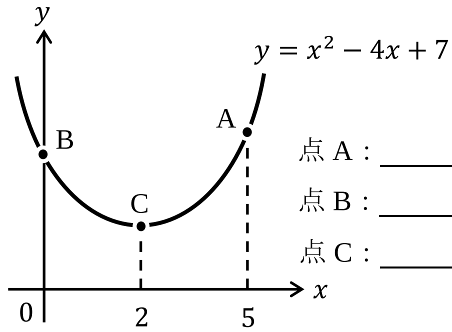


点 A：________

点 B：________

点 C：________

6.

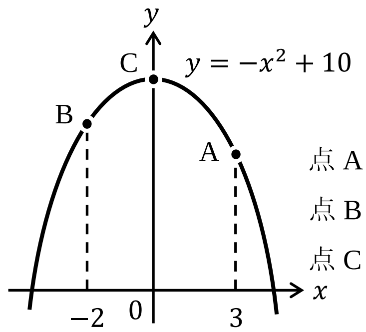


点 A：________

点 B：________

点 C：________

7.

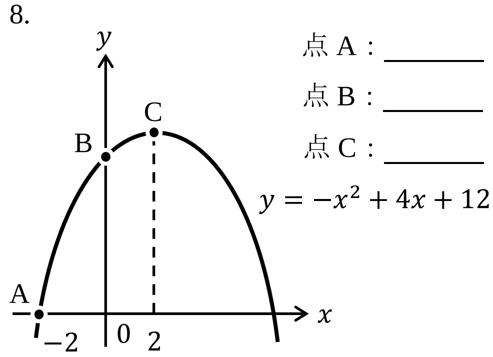


点 A：________

点 B：________

点 C：________

8.

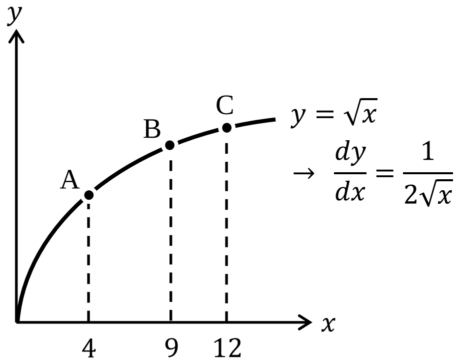


点 A：________

点 B：________

点 C：________

9.



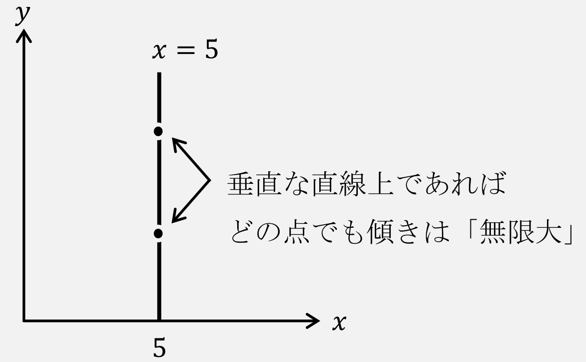
点 A：________ $\left(\qquad\qquad \right)$

点 B：________ $\left(\qquad\qquad \right)$

点 C：________ $\left(\qquad\qquad \right)$

＜補足１３＞ 垂直な直線の傾きは？

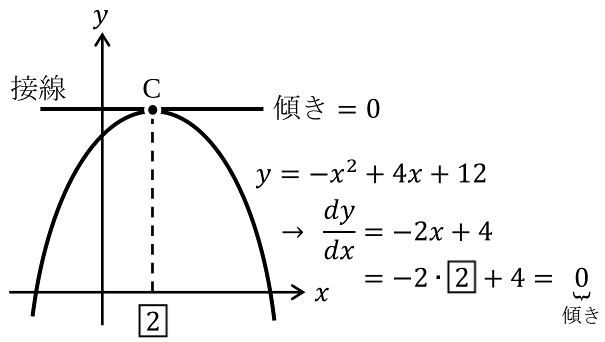
水平線であるグラフ（例えば，$y = 3$）の傾きは 0 だと説明したが，下図のような垂直な直線であるグラフ（例えば，$x = 5$）の傾きはいくつになるだろうか？



あえて答えるなら「無限大（∞)」である。「 ∞ 」や「 −∞ 」と答えるより，単に無限大と言った方がよい。なぜなら，垂直な直線であるグラフの上では，右に少しでも進もうとすれば，上に ∞ だけ上がってしまうと考えられるし，下に ∞ だけ下がってしまうとも考えることができるためである（ほとんど垂直である右上がりの直線のグラフや，ほとんど垂直である右下がりの直線のグラフを考えてみればイメージがつきやすい)。

この補足の内容はミクロ経済学やマクロ経済学において弾力性の話で再び登場することとなる。

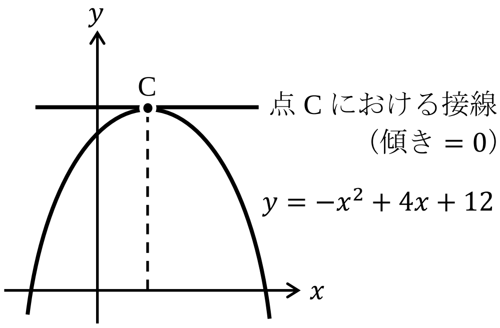
問題 8.は第 7 節「グラフ」でも登場したグラフと同じであるが，もう一度下に同じグラフを書こう。



問題 8.でも点 C における接線の傾きが 0 であることを確認したが，点 C はグラフの頂点であるので，点 C での接線は水平線になるはずである（点 C は山のてっぺんなので，点 C では右上がりでも右下がりでもなく，平（たいら）になっている。このことから，点 C での接線は水平線になるはずなのである)。

点 C において接線の傾きが 0 になるという特徴を利用して，次の例題を考えてみよう。

【例題】次のグラフ中の点 C における x 座標の値を求めなさい。



（解答）

点 C では接線の傾きが 0 であるので，$y = -x^2 + 4x + 12$ を微分して得られる値が 0 になる。つまり，

$$y = -x^2 + 4x + 12 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2x + 4 \boxed{= 0}$$

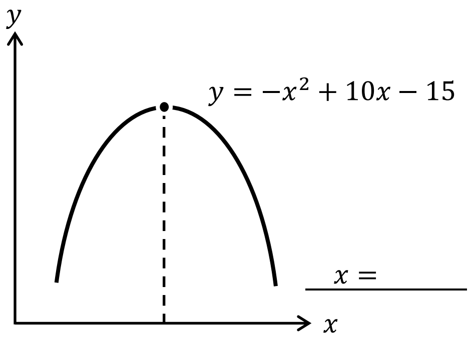
というように，微分した結果（$-2x + 4$）が 0 の値をとるように書く。あとはこの方程式を次のように解けばよい。

$$-2x + 4 = 0$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$

したがって，点 C の x 座標の値は 2 である。（前ページ下部のグラフを確認すること）

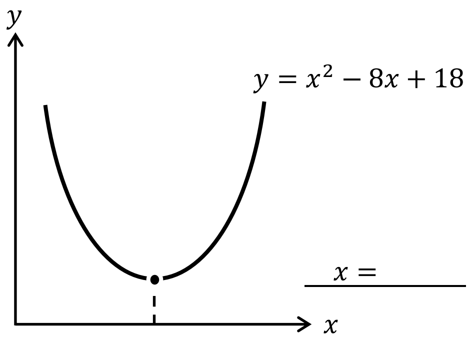
【問題】各式のグラフの頂点における x 座標の値を求めなさい。

1.



$x =$ ＿＿＿＿＿＿

2.



$x =$ ＿＿＿＿＿＿

3. $y = -x^2 + 4x$

$x =$ ＿＿＿＿＿＿

4. $y = x^2 + 3x + 5$

$x =$ ＿＿＿＿＿＿

5. $y = x^2 + 4$

$x =$ ＿＿＿＿＿

6. $y = 3x^2 - 12x - 5$

$x =$ ＿＿＿＿＿

7. $y = -2x^2 + 5x + 10$

$x =$ ＿＿＿＿＿

8. $y = -5x^2 + 10$

$x =$ ＿＿＿＿＿

9. $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$

$x =$ ＿＿＿＿＿

10. $y = -0.3x^2 + 2x$

$x =$ ＿＿＿＿＿

＜補足１４＞ 経済学で積分は使うか？

これから経済学を学び始めるという学生から，

「経済学って，微分積分は使いますか？」

という質問を受けることがある。これに対してはいつもこう答える。

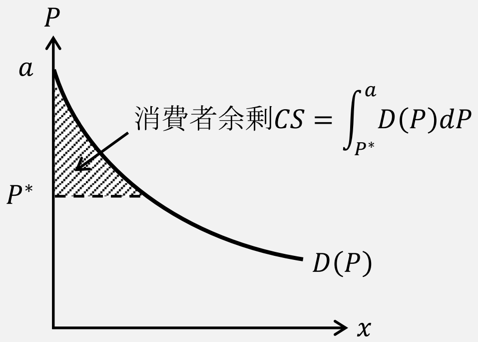
「微分は使いますけど，積分はあまり使いませんよ」

公務員試験や各種資格試験で出題される経済学の問題でも積分はほとんど見ない。

ちなみに，大学院レベルの経済学であったり，経済学者が使う経済モデルであれば，積分も頻繁に登場する。そのため，経済学では積分を使いませんとは断言できない。

ここで，積分が経済学でも登場する例を紹介する（ただし，第 1 講の内容を用いる）。下図の斜線部の面積は消費者余剰 CS である。第 1 講では需要曲線が直線であったので，三角形の面積を求めておけばよかったが，下図の斜線部は三角形ではないので，面積をそう簡単に求めることはできない。ここで使うのが積分である。詳しい説明は避けるが，高校 2 年生の数学Ⅱで習う「積分」を使うことで，曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めることができる。この要領で下図の消費者余剰 CS を求めることができるのである。

（図中ではあえて正確に式を書いているので，式の意味を理解する必要はありません）



10. 偏微分

偏微分（へんびぶん）は高校では登場せず，大学数学の範囲であるので，手が出そうにないと思うかもしれないが，前節で微分に慣れた人であれば，偏微分の計算はもうすでに出来るようになっているも同然なのだ。では，次の問題で偏微分の計算方法を確認しよう。

次の式を x で偏微分しなさい。

$$z = x^2 + xy + y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{2-1} + y + 0 = \underline{2x + y}$$

「変数 y が定数と見なされて」微分されていることに気が付くだろうか（例えば，y^2 は 0 に変化している）。偏微分とはこれだけのことなのだ。

ちなみに，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$（ラウンドゼット・ラウンドエックスなどと読む）の意味は，

$$\frac{\partial z}{\partial x}：「z = \cdots」の式を x で偏微分する$$

ということである。

次に，先程と同じ式を，y で偏微分すると次のようになる。

$$z = x^2 + xy + y^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial \boxed{y}} = 0 + x + 2y = \underline{x + 2y}$$

この場合は，「変数 x が定数と見なされて」微分されていることがわかる。

これより，偏微分が「偏（かたよ）った微分」であることがわかる。つまり，x で偏微分しなさいと言われれば，その他の変数は定数と見なした上で x で微分するのである。

次の例題を見て，偏微分の計算のコツをつかもう。

【例題】次の式を x と y でそれぞれ偏微分しなさい。

(1) $z = 2x + 3y$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 + 0 = 2$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3 = 3$

(2) $z = x^2 + y + 3$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 0 + 0 = 2x$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + 1 + 0 = 1$

(3) $z = x^3 + y^2$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 = 3x^2$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2y = 2y$

(4) $z = xy$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$

(5) $z = 2xy + y$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2y + 0 = 2y$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x + 1$

(6) $z = 3x^2y$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3 \times 2x^{2-1}y = 6xy$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$

(7) $z = x^3y^4$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^4$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y^3$

(8) $z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

(9) $z = 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2 \times \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}y^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$

(10) $z = \sqrt{x} + y$ （解答）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 0 = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + 1 = 1$

＜補足１５＞ 微分と偏微分の記号

微分は英語で，

derivative（デリバティブ），もしくは differentiation（ディファレンシエーション）

であるが，これらの頭文字 d が，

$$\frac{\boxed{d}y}{\boxed{d}x}$$

に相当している。それに対し，偏微分は英語で，

partial derivative，もしくは partial differentiation

＊ partial（パーシャル）: 部分的な，偏った

である。ところで，偏微分は，

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

というように表せたが，∂ という記号は何だろうか (∂_∂ ?)

∂ は＜補足１１＞のギリシャ文字一覧にも見当たらない。実は，∂ は数学記号であり，ギリシャ文字の δ（デルタ）に対応している。∂ の読み方は数多く，「ラウンド」「ラウンドディー」「ラウンドデルタ」「ディー」「パーシャル」などである。round は丸いという意味なので，ラウンドディーは丸い d を意味する（確かに，∂ は丸まった d のように見える)。

【問題】次の式を x と y でそれぞれ偏微分しなさい。

1. $z = x + y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

2. $z = 5x - 4y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

3. $z = -3x^2 + 4x + y$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

4. $z = x^2 + y^2$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

5. $z = 3xy$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

6. $z = xy + y^2$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

7. $z = x^2y^2$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

8. $z = 5x^4y^3$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ______ , $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______

9. $z = x^2y^2 + xy + 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

10. $z = x^2y + xy^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

11. $z = x(24 - y)$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

12. $z = x(24 - y)^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

13. $z = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

14. $z = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

15. $z = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

16. $z = x^{0.5}y^{0.5}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

17. $z = x^{0.4}y^{0.6}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

18. $z = 2x^{0.4}y^{1.2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

19. $z = 2\sqrt{x} + y$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

20. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} =$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$

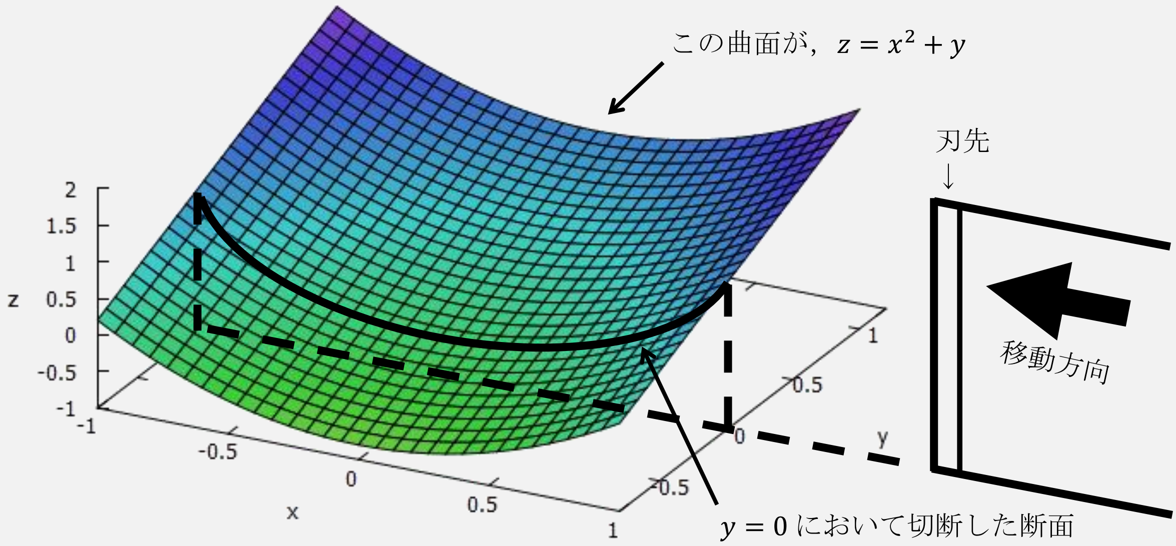
＜補足１６＞ 偏微分の意味

偏微分の意味についても確認しておく。$z = x^2 + y$ を x で偏微分して，$x = 3$ を代入する。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2 \cdot 3 = 6$$

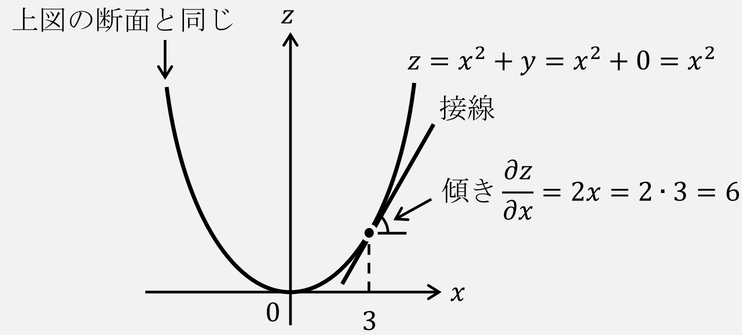
この 6 が意味することが分かれば，偏微分の意味が分かるのである。

まず，$z = x^2 + y$ をグラフに書くと，次のような 3 次元のグラフになる。



次に，上図にあるように右側から刃物でグラフをすぱっと切る（$y = 0$ で切断していることに注目。また，y で偏微分するのであれば x 軸側から切断することになる)。

その断面が横長の放物線（実線）として表されているわけであるが，この断面（放物線）を，横軸を x，縦軸を z とする下図に書き出してやる。（上図の断面は横長の放物線だが，下図では見やすくするために通常の放物線のように書いている）



このグラフに書かれている $z = x^2$ が先程の断面の式である（$z = x^2 + y$ を $y = 0$ で切断した断面は，$z = x^2 + y$ に $y = 0$ を代入することで，その断面の式を求めることができる)。そして，この断面の $x = 3$ における接線の傾きが最初に求めた 6 なのである！つまり，偏微分することの意味は，「3 次元のグラフの断面の接線の傾きを求めること」になるのである。（今回は x で偏微分をした式から y が消えていたが，式の形によっては y が残ることもある。例えば，$z = x^2 + xy \rightarrow \partial z/\partial x = 2x + y$ である。この $2x + y$ に，例えば $x = 3, y = 1$ を代入して得られる $2 \cdot 3 + 1 = 7$ の意味することは，3 次元のグラフを $y = 1$ で切断して，その断面のグラフ（$z = x^2 + x \cdot 1 = x^2 + x$ ）の $x = 3$ における接線の傾きが 7 なのである）

11. 関数

経済学では，

$$U(x,y)=xy \qquad x=D(P) \qquad S(P) \qquad Y=f(K,L) \qquad I=I(r)$$

などという式が登場する。これらの式が経済学で登場したときに，関数の考え方がよくわかっていないと「この式はどう意味なのだろうか？」と立ち止まってしまうことになる。

本節では，関数の考え方をしっかりと理解していくことにしよう。

まず，

$$y=2x+1$$

は，

$$y=f(x)$$

と書き換えることができる。

$y=f(x)$ は「y は x の**関数**である（y の値は x の値で決まる）」という意味である。ちなみに，f は関数（function）の頭文字からきている。

確かに，$y=2x+1$ は x の値が決まれば y の値が決まる（例えば，$x=3$ ならば $y=2\cdot3+1=7$）ので，$y=f(x)$ と書き換えてよさそうである。

次に，これとは少し違う書き換えをしてみる。

$$y=2x+1$$

を，

$$f(x)=2x+1$$

と書き換える。

ここで，$x=3$ を代入すると，

$$f(3)=2x+1=2\cdot3+1=7$$

というように 7 が得られることがわかる。

これからわかるように，$f(x)$ という表記を用いることで，$f(3)$ というように x に何の値を代入したかが見やすくなるのである。

ところで，

$$y=f(x)$$

と書いたが，「f」にはどんな記号を用いても構わない。（慣習で f を使っているだけ）

$$y=F(x) \qquad y=g(x) \qquad y=h(x) \qquad y=A(x) \qquad y=\omega(x)$$

このように，どのような記号を用いても，特に問題はない。

ところで，経済学では**効用関数**という式が登場する（第 3 講の内容）。

今，x を「りんごを食べる数」，U を「りんごを食べたことで感じる満足度（効用）」とする。経済学では，**効用**という単語が登場するが，これは満足度のことであり，効用は英語で Utility（ユーティィリティー）と書くので，その頭文字の U で効用の値を表す。

りんごを食べる数xと効用Uの関係式が次のように表せるとする。

$$U = \sqrt{x} \quad : \text{効用関数}$$

この式の意味は，りんごを4個食べれば（$x = 4$），効用は2（$U = \sqrt{4} = 2$）と計算できるということである。

この$U = \sqrt{x}$は次のように書き換えることができる（以下，8つの式はどれも同じことを意味しているとする）

○：よく使う形　△：使わない形

1.	$U = \sqrt{x}$	○：元の式と同じである。
2.	$U = f(x) = \sqrt{x}$	△：間違いではないが，式が長いので用いられない。
3.	$f(x) = \sqrt{x}$	△：効用Uが登場しないので，効用関数だと判断しづらい。
4.	$U(x) = \sqrt{x}$	○：効用関数だと判断でき，具体的な式（$\sqrt{x}$）までわかる形。
5.	$U = U(x) = \sqrt{x}$	△：式が長いので用いられない。
6.	$U = f(x)$	○：具体的な式の形はわからないが，効用関数だとわかる。
7.	$U = U(x)$	○：6番目の式の関数fの名称を変えたものである。
8.	$U(x)$	○：7番目の式を短くした形である。

ここで，○と書いた1, 4, 6, 7, 8番目の式が，経済学でも登場する式の形である。注意をしていただきたいのが，3と4番目（もしくは，6と7番目）の式の違いである。前ページ下部で書いたように，関数を表す記号fは，どのような記号に変えてもよい。どのような記号に変えてもいいのであれば，わかりやすい記号に変えるとよい。4番目の式のように，fの代わりに効用を意味するUを用いることで，4番目の式

$$U(x) = \sqrt{x}$$

を見るだけで，これは効用関数だと判断することができるのである。

また，6, 7, 8番目の式

$$U = f(x) \qquad U = U(x) \qquad U(x)$$

も経済学でよく用いられる形である。これらの式には$\sqrt{x}$が含まれていないので，具体的にどのように効用が計算できるかはわからないが，りんごを食べれば効用の値が決まる（Uはxの関数である）ということはわかるのである。

ちなみに，本節の最初に挙げた式がこれら8つの式のどれに対応するか書いておく。

$U(x, y) = xy$	4番目の式。関数の名称は「効用関数」
$x = D(P)$	6番目（7番目）の式。関数の名称は「需要関数」
$S(P)$	8番目の式。関数の名称は「供給関数」
$Y = f(K, L)$	6番目の式。関数の名称は「生産関数」
$I = I(r)$	7番目の式。関数の名称は「投資関数」

それでは，関数の考え方や関数の微分の書き方に慣れるために問題を解いてみよう。

【問題】次の文章中の空所に適切な値や文字を入れなさい。

1. $f(x) = -2x + 3$ とするとき，$f(5) =$ （　　　　）である。
2. $f(x, y) = x + 2y$ とするとき，$f(1, 2) =$ （　　　）である。
3. $y = f(x)$ とするとき，y は（　　　）の関数である。
4. $z = f(x, y)$ とするとき，z は（　　　）と（　　　）の関数である。
5. $z = F(x, y)$ とするとき，z は（　　　）と（　　　）の関数である。
6. $f(x) = x^2$ とすると，
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2x$$
と書けるので，$f'(3) =$ （　　　）である。
7. $f(x) = 3x^2 + 2$ とするとき，$f'(5) =$ （　　　　）である。
8. $f(x, y) = x^2 y$ とすると，
$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy$$
と書けるので，$f_x(3, 4) =$ （　　　　）である。
9. $f(x, y) = x^2 y$ とすると，
$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^2$$
と書けるので，$f_y(2, 1) =$ （　　　）である。
10. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ とすると，
$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad \to \quad f''(x) = 6x + 2$$
と書けるので，$f''(3) =$ （　　　　）である。
11. $f(x, y) = x^2 y$ とすると，
$$f_x(x, y) = 2xy \quad \to \quad f_{xx}(x, y) = 2y$$（もう一度，xで偏微分した）
と書けるので，$f_{xx}(5, 1) =$ （　　　）である。
12. $f(x, y) = x^2 y$ とすると，
$$f_x(x, y) = 2xy \quad \to \quad f_{xy}(x, y) = 2x$$（次にyで偏微分した）
と書けるので，$f_{xy}(2, 3) =$ （　　　）である。

この問題に関連して関数の微分や偏微分の形のバリエーション（一部）を示しておく。

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} \qquad f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \qquad f_{xx}(x, y) = f_{xx} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{xy} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y)$$

＜補足１７＞ 関数のイメージ

関数とは何かを説明するのによく用いられるイメージ図がある。図の説明をする前に簡単な例を挙げる。

$y=f(x)$ のとき，$f(x)=2x+1$ であれば，

Step1　$x=3$ とする

Step2　$f(x)$ に代入する

Step3　$f(3)=2\cdot 3+1$

Step4　$y=7$ が得られる

これを踏まえた上で，$y=f(x)$ のイメージ図を書く。

$$x \longrightarrow \boxed{\;f\;} \longrightarrow y$$

この図の見方は次のようである。（図は左から見ていく）

Step1　x はある値である

Step2　f という機械（箱）の中に，x の値を入れる（x の値を入力）

Step3　機械（箱）の中で計算が行われる

Step4　y の値が得られる（y の値が出力）

実は，この Step は上の簡単な例の Step と対応させているので，見比べてみると図の意味がわかるだろう。（機械（箱）の名前は f でなくても，F でも g でも何でもよい）

＜補足１８＞ イコール（等式）の種類

次の 3 つの等式を見て欲しい。

①　$2x+1=3$　　　②　$2(x+1)=2x+2$　　　③　$\pi=3.14\cdots$

これらはどれも等式ではあるが，等式の種類が違っているような気がしないだろうか？実は，等式には種類があって，①～③はそれぞれ，

①　**方程式**（変数が特別な値のときにイコールが成立する式）

②　**恒等式**（変数がどんな値のときにもイコールが成立する式）

③　**定義式**（新しい記号を使って名前を設定するための式）

というように違いがある。噛み砕いて説明してしまうと，

①　「これを解いて x の値が求まるぞ」という式

②　式変形

③　円周率を π と名付けた

ということになる。例えば，前ページの下部にある等式はすべて定義式である。定義式で用いるイコールは「$\stackrel{\text{def}}{=}$（definition：定義）」，「$\equiv$」，「$:=$」などがあり，どれを使ってもよい（ただし，恒等式では「$\equiv$」を使うこともあるので注意）。使用例は次の通りである。

$$f'(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{df(x)}{dx},\qquad f''(x)\equiv\frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx},\qquad f_{xy}(x,y):=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$

＜補足１９＞ チェーンルール

少しレベルの高い経済学を学ぶと必ず出てくるのが，チェーンルールである。チェーンルールは，日本語では「連鎖律」といい，英語では chain rule と書く。

とにかくチェーンルールを使えるようになりたいならば，次のように計算すればいい。

$y=(2x+1)^{10}$ を x で微分するとき，括弧内の $2x+1$ を一つのかたまり$\boxed{}$と見なして，微分する。（10 乗を展開するのは大変なので，チェーンルールを使わざるを得ない）

Step1　$y'=10\cdot(\boxed{2x+1})^{10-1}=10(\boxed{2x+1})^9$

実は，これだけでは間違いで，かたまり$\boxed{}$を x で微分した式をかけ算する必要がある。

Step2　$y'=10(2x+1)^9\underline{\times(\boxed{2x+1})'}=10(2x+1)^9\times 2=20(2x+1)^9$　… ①

これで，チェーンルールを使って $y'=20(2x+1)^9$ が得られたことになる。

では，チェーンルールの理屈を説明する。まずは一般的な説明をしておく。

チェーンルールとは，いくつかの関数から合成された合成関数を微分すると，合成関数の導関数は，合成前の関数の導関数のかけ算の形となることをいう（要は，チェーンルールとは「合成関数の微分」のこと）。

チェーンルールを式で書けば次のようになる。合成関数 $f(g(x))$ を x で微分すると，

$$\underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{導関数}}=\underbrace{\frac{df}{dg}}_{\text{導関数①}}\cdot\underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{導関数②}}\quad\text{：チェーンルール}$$

となる。(導関数①と②がg を介して積で繋がっているところがチェーン（鎖）のイメージ)

では，「導関数って何？」「合成関数って何？」「チェーンルールってどう使うの？」と疑問が出てくると思うので，一つずつ説明していこう。

まず，$f(x)=x^2$（もとの関数）とするとき，この関数を x で微分すると，

$$\frac{df}{dx}=2x\quad\text{：導関数}$$

が得られるが，この式が**導関数**である（微分して「導」かれた「関数」)。要は，「微分して得られる式が導関数だ！」と考えればよい。

次に，$f(x)=(2x+1)^2$ とするとき，この関数を x で微分するには，例えば，

$$f(x)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1\ \to\ \frac{df}{dx}=8x+4\quad\cdots②$$

として計算すればよい。しかし，次のようにも計算できる。

$f(x)=(2x+1)^2$ のとき，$g(x)=2x+1$ とおくと，次のように書くことができる。

$$\underbrace{f(g(x))}_{\text{合成関数}}=(\underbrace{2x+1}_{=g(x)})^2=\{g(x)\}^2\quad\cdots③$$（この式を簡略化すると，$f=g^2$ である）

$f(g(x))$ は，もとの関数である $f(x)$ に $g(x)$ が合成されたと考えるので，**合成関数**という。

③式に対してチェーンルールを使うと，(df/dg は，③式 $f=g^2$ を g で微分するイメージ)

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}=\underbrace{2g^{2-1}}_{=df/dg}\cdot\underbrace{(2x+1)'}_{=dg/dx}=2(\underbrace{2x+1}_{g(x)\text{を代入}})^{2-1}\cdot 2=4(2x+1)=8x+4\quad\cdots④$$

と計算することができ，②式と一致したことがわかる。（また，①式の計算過程と④式の計算過程が，実は同じになっていることも確かめることができるだろう）

最後に，経済学で出てくるチェーンルールの計算例も見ておこう。（x：消費量）

$$\text{効用関数 }U=\sqrt{2x+1}\ \to\ \text{限界効用 }MU=\frac{dU}{dx}=\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\underbrace{(2x+1)'}_{=2}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

12. 数列

経済学では数列も登場する。高校のときに「等差数列」「等比数列」「階差数列」といった数々の数列を学んだかもしれないが，経済学では主に「等比数列」が登場する。それも無限に続く等比数列をたし算していくという作業がよく出てくる。

まずは等比数列から復習していこう。

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\quad 48,\quad 96$$

この数列は，左側の数字に 2 が順にかけ算されて右側の数字になっていく**等比数列**であることがわかる。最初の数字である 3 を**初項** a（つまり，$a=3$），かけ算されていく数字である 2 を**公比** r（つまり，$r=2$）という。

ではこの数列をたし算してみよう。

$$3+6+12+24+48+96$$

これは等比数列の和であり**等比級数**（幾何級数）という。

次に，これを無限に足していくとする。

$$3+6+12+24+48+96+192+384+768+\cdots$$

これは無限に続く等比数列の和であり**無限等比級数**という。経済学ではこの無限等比級数がよく出てくるのである。

ところで，先程の無限等比級数は，

$$3+6+12+24+48+96+192+384+768+\cdots=\infty$$

このように，より大きな数字を無限にたし算していくので答えは無限大となってしまう。

しかし，次のような例はどうであろうか。

$$100+50+25+12.5+6.25+3.125+\cdots=\ ?$$

これも無限等比級数である。初項 $a=100$，公比 $r=0.5$ で，無限に続く等比数列のたし算となっている。これも数字を無限のたし算していくので，やはり答えは無限大となるのであろうか？この無限等比級数の計算結果は次のようである。

$$100+50+25+12.5+6.25+3.125+\cdots=\boxed{\frac{100}{1-0.5}}=\underline{200}$$

この無限等比級数の答えは無限大とはならず 200 になるのである！これは，数字を無限に足していってはいるが，足す数字がどんどん小さくなっているので，合計が無限大にはならないというわけである。ただ，いきなり登場した式の中の四角部分が気になるであろうから，無限等比級数の公式を紹介しておこう。

$$\boxed{\underbrace{a+ar+ar^2+ar^3+\cdots}_{\text{無限等比級数}}=\frac{a}{1-r}\quad（-1<r<1\ のとき）}$$

この $\dfrac{a}{1-r}$ が先程の式中の $\dfrac{100}{1-0.5}$ に対応しているのである。

＜補足２０＞ 無限等比級数の公式の導き方

無限等比級数の公式

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad （-1 < r < 1 のとき）$$

を示しておこう。($-1 < r < 1$ は，$|r| < 1$ と書かれることもある)

今，無限等比級数の値を S とおく。(＜補足１８＞より①式は定義式である)

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \qquad ：①$$

この両辺を r 倍すると，

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots \qquad ：①\times r$$

となる。これらの式の両辺を次のようにひき算すると，

$$\begin{aligned} S &= a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} &&：① \\ -)\ rS &= \quad \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cancel{\cdots} &&：①\times r \\ \hline S - rS &= a \\ (1-r)S &= a \\ S &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

となり，無限等比級数の公式が導出できた。

ただし，この導出方法は実は正確ではない。($-1 < r < 1$ という条件を使っていない！)そのため，参考までに正確な導出方法も紹介しておく。

次のような（無限ではない）等比級数を考える。

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad ：②$$

この両辺を r 倍すると，

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad ：②\times r$$

となり，これらの両辺を次のようにひき算する。

$$\begin{aligned} S_n &= a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^{n-1}} &&：② \\ -)\ rS_n &= \quad \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n &&：②\times r \\ \hline S_n - rS_n &= a \qquad\qquad - ar^n \\ (1-r)S_n &= a - ar^n \\ S_n &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n \end{aligned}$$

ここで，S_n の極限をとる。

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=0} = \frac{a}{1-r}$$

（この計算過程で，$-1 < r < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ となることを使っている）

よって，無限等比級数の公式が導出できた。

ところで，経済学で登場する無限等比級数の公比は，たいてい，$r = 0.6$ や $r = 0.9$ といったような $0 < r < 1$ となる値なので，$-1 < r < 1$ という条件は通常気にしない。

【問題】次の無限等比級数の値Sを求めなさい。ただし，答えが∞や$-\infty$に発散する場合は，∞や$-\infty$と書きなさい。

1. $100+80+64+51.2+\cdots=\dfrac{100}{1-0.8}=$

2. $100+60+36+21.6+\cdots=$

3. $200+180+162+145.8+\cdots=$

4. $250+100+40+16+\cdots=$

5. $400+300+225+168.75+\cdots=$

6. $100+120+144+172.8+\cdots=$

7. 初項$a=300$，公比$r=0.1$のとき，$S=$

8. 初項$a=240$，公比$r=0.6$のとき，$S=$

9. 初項$a=100$，公比$r=0.9$のとき，$S=$

10. 初項$a=100$，公比$r=0.99$のとき，$S=$

＜補足２１＞ 非負とは？

経済学では，「価格Pは非負の実数とする」いうような，高校数学ではあまり聞きなれない言葉遣いをすることがある。ここで簡単に解説しておくこととする。

まず，**正の数**とは「プラスの値」ということである。注意しなければならないことは，正の数に0（ゼロ）は含まないということである。逆に，**負の数**とは「マイナスの値」であり，負の数にも0は含まれない。

では，「0 を含む正の数」を何と表現するかというと，**非負**（ひふ）の数と表現するのである。非負の数とは文字通り「負ではない数」であるので，「0 を含む正の数」ということになるのである。逆に，**非正**（ひせい）の数は「0を含む負の数」である。

したがって，「価格Pは非負の実数とする」ということは「$P\geq 0$」（つまり，価格Pはマイナスにはなりませんよ）ということを意味しているに過ぎないのである。ところで，「実数って何？」と思うかもしれないので，実数，整数，自然数の具体例を挙げておく。

整数　：$\cdots$，-3，-2，-1，0，1，2，3，$\cdots$

自然数　：1，2，3，4，5，$\cdots$

実数　：整数に小数など（0.5，-2.75，$0.333\cdots$，$\sqrt{2}$など）も含める

13. 総合問題（経済学での計算例）

次の問題は，経済学の問題で用いられる計算過程の一部を取り出したものである。式や変数の意味は考えず，単なる計算問題だと思ってチャレンジしてほしい。

1～10.はミクロ経済学から，11～20.はマクロ経済学から選んできた問題であるが，これらの問題を解くことを通じて，ミクロ経済学とマクロ経済学で用いる数学の知識のレベル感が（何となく）わかってくるだろう。

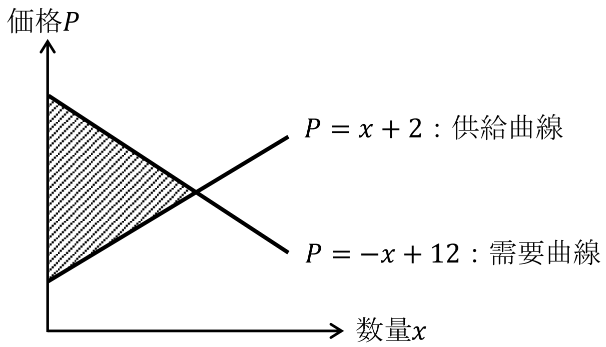
【問題】各問いに答えなさい。空所に書き入れる問題は，空所に適切な値，もしくは式を書きなさい。（経済学を知らなくても，計算問題として解けるように作成している）

1. 価格を P，数量を x とするとき，需要曲線と供給曲線がそれぞれ次のように表される。

$$\begin{cases} P = 50 - \dfrac{3}{100}x & \text{：需要曲線} \\ P = \dfrac{1}{50}x & \text{：供給曲線} \end{cases}$$

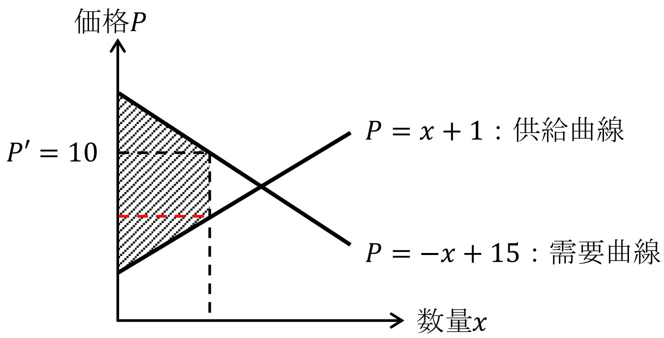
交点における均衡価格 P^* と均衡数量 x^* は，$P^* =$ （　　　）, $x^* =$ （　　　　）となる。

2. 次のグラフにおいて総余剰 TS（斜線部分の面積）を求めなさい。



$TS =$ ＿＿＿＿＿＿

3. 次のグラフは価格 $P' = 10$ で価格規制されている状況を表しているが，このときの総余剰 TS（斜線部分の面積）を求めなさい。



$TS =$ ＿＿＿＿＿＿

4.　次の需要の価格弾力性 ε_D（イプシロン・ディー）の値を求めなさい。

$$\varepsilon_D = -\frac{\frac{8-10}{10}}{\frac{150-120}{120}} =$$

5.　次の需要の価格弾力性 ε_D の値を求めなさい。

$$\varepsilon_D = -\left(-\frac{I}{2P^2}\right) \cdot \frac{P}{\frac{I}{2P}} =$$

6.　x を消費量とするとき，効用関数が次のように表されるとする。

$$U = \sqrt{x}$$

$x = 100$ のときに得られる効用 U は，$U =$ （　　　　）である。
また，効用関数より，限界効用 MU は

$$MU = \frac{dU}{dx} =$$

となるので，$x = 100$ における限界効用 MU の値は,

$$MU =$$

と計算することができる。

7.　X 財の消費量を x，Y 財の消費量を y とし，効用関数が

$$U = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

のように表されるとき，X 財に関する限界効用 MU_x は

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} =$$

であり，Y 財に関する限界効用 MU_y は,

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} =$$

であるので，限界代替率 MRS は,

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} =$$

となる。

8. 効用最大化条件と予算制約式が次のように書けるとする。

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} & \text{：効用最大化条件} \\ 20x + 10y = 1000 & \text{：予算制約式} \end{cases}$$

この連立方程式を解くと最適消費量は，$x^* =$ （　　　） , $y^* =$ （　　　）となる。

9. x を生産量とするとき，総費用関数 TC が次のように書けるとする。

$$TC = \frac{3}{4}x^3 - 2x^2 + 25x + 120$$

これより，限界費用関数 MC は

$$MC = \frac{dTC}{dx} =$$

と求めることができる。

10. x を生産量とするとき，平均費用関数 AC が次のように書けるとする。

$$AC = 3x^2 - 18x + 40$$

AC が最小となる生産量 x の値は $x =$ （　　　）である。

11. Y を国民所得とするとき，次の財市場均衡条件（方程式）から得られる均衡国民所得 Y^* の値を求めなさい。

$$Y = 15 + 0.625\{Y - (8 + 0.2Y)\} + 60 + 30$$

$Y^* =$ ＿＿＿＿＿

12. 次の連立方程式は財市場を表している。（C：消費，I：投資）

$$\begin{cases} Y = C + I \\ C = 10 + 0.8Y \\ I = 20 \end{cases}$$

これを解いて得られる均衡国民所得 Y^* の値を求めなさい。

$Y^* =$ ＿＿＿＿＿

13. 次の方程式を解く作業を見てほしい。（C_0：基礎消費，c：限界消費性向，G：政府支出）

$$Y = C_0 + cY + I + G$$
$$Y - cY = C_0 + I + G$$
$$(1 - c)Y = C_0 + I + G$$
$$Y^* = \frac{1}{1 - c}(C_0 + I + G)$$

これを参考に，次の財市場均衡条件から得られる均衡国民所得 Y^* を求めなさい。

$$Y = C_0 + c(Y - T) + I + G$$

$Y^* =$ ____________________

14. 次の政府支出乗数を求めなさい。（ΔY：国民所得の変化分，ΔG：政府支出の変化分）

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - 0.75(1 - 0.2)} =$$

15. 次の定額税乗数を求めなさい。

$$\frac{\Delta Y}{\Delta T_0} = \frac{-0.75}{1 - 0.75(1 - 0.5)} =$$

16. 次の財市場均衡条件（方程式）において，$Y = 100$ であるときの G の値を求めなさい。

$$Y = 10 + 0.8\{Y - (30 + 0.2Y)\} + 20 + G$$

$G =$ __________

17. 次の財市場均衡条件を「$r = \cdots$」の式の形（IS 曲線）に変形しなさい。（r：利子率）

$$Y = 100 + 0.8\{Y - (50 + 0.2Y)\} + 300 - 4r + 200$$

$r =$ ____________________

18. 次の貨幣市場均衡条件を「$r = \cdots$」の式の形（LM 曲線）に変形しなさい。（M：マネーストック）

$$\frac{M}{2} = 4Y - 10r + 20$$

$r =$ ________________

19. 次の IS－LM モデル（連立方程式）において，交点における均衡国民所得 Y^* と均衡利子率 r^* の値を求めなさい。

$$\begin{cases} r = -0.09Y + 110 & \text{：IS 曲線} \\ r = 0.04Y - 20 & \text{：LM 曲線} \end{cases}$$

$Y^* =$ __________ $, r^* =$ __________

20. 次の IS－LM モデル（連立方程式）において，マネーストック M が 20 から 30 に増加したとき，均衡国民所得 Y^* はいくら増加するか求めなさい。

$$\begin{cases} r = -Y + 10 & \text{：IS 曲線} \\ r = Y - M & \text{：LM 曲線} \end{cases}$$

Y^*の増加分 $=$ __________

どうだっただろうか？この総合問題を通じて，ミクロ経済学の数学のレベルの方が高いと感じたのではないだろうか。これからミクロ経済学とマクロ経済学の授業へと本格的に入っていくわけだが，数学が苦手な人はマクロ経済学の方が，計算自体は楽（ラク）に感じるだろう。ただ，ミクロ経済学も計算がワンパターンであるので，慣れてしまえばそれほど苦ではない。

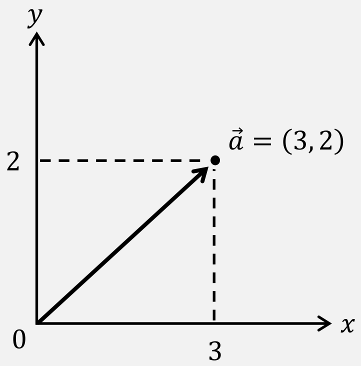
ミクロ経済学もマクロ経済学も大切なのは計算ではなく「経済学の考え方」だということを肝に銘じてもらって，次の授業へ進んでいこう！

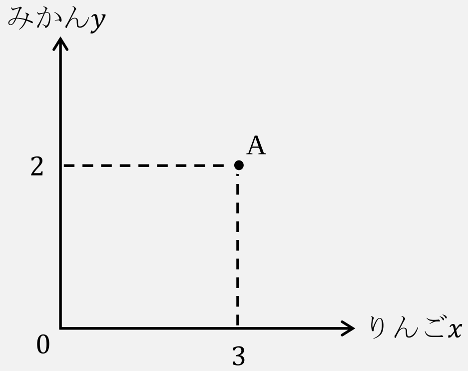
＜補足２２＞ 経済学でもベクトルが登場する

高校数学（数学 B）にも登場するベクトルであるが，ベクトルを勉強したことのある人であれば「ベクトル＝矢印」を連想する人が多いかもしれない。例えば，

$$\vec{a} = (3, 2)$$

をグラフに書くと，（原点を始点とした場合）左下図のように書ける。





実は，経済学でもベクトルが登場する。例えば，x を「りんごを食べる数」，y を「みかんを食べる数」とすると，りんごを 3 個，みかんを 2 個食べれば，

$$\text{消費ベクトル} = (3, 2)$$

と書け，右上図の点 A（消費点）が消費ベクトルに対応する。消費「ベクトル」と読んでいるが，左上図の矢印のようには考えず（$\vec{a}$ という表記も経済学では使わない），消費ベクトルは単なる座標（ここでは点 A の座標）のように考えればよい。

＜補足２３＞ 経済学の様々な分野

経済学の中核となる分野が「ミクロ経済学」「マクロ経済学」「計量経済学」の 3 つであるという話はした（p.24）が，これらの 3 つの分野を土台として，経済学は数多くの分野に分かれる。

例えば，国際経済学，労働経済学，公共経済学，農業経済学，環境経済学，開発経済学，医療経済学，都市経済学，行動経済学，厚生経済学（社会選択理論），産業組織論，金融論，財政学，ゲーム理論などの数多くの応用分野がある（産業組織論などのように「〇〇経済学」という名称ではなくても経済学の分野なので注意）。他にも，各国の経済の歴史を研究する「経済史」や経済学そのものの歴史を研究する「経済学史」という分野もある（経済史と経済学史を混同する人がいるが，これらの分野はまったく別の分野である）。

このように経済学は様々な分野に分かれているため，経済学者の世界で，「あなたの専門は何？」と聞かれて「環境です」と答えれば，環境経済学を専門としていることが相手に伝わるのである。ちなみに，環境経済学など各分野の中でも理論か実証かに分かれる場合が多いので，「環境で実証をやっています」と答えれば，「環境経済学の分野で，計量経済学を用いた研究をしている」ということになる。