はじめよう経済学+Plus

第10講 経済成長論入門

講師：加藤 真也

今回(第10講)は…

・資本蓄積
・コブ＝ダグラス型生産関数
・ソロー・モデルの構造
・ソローの基本方程式①
・ソローの基本方程式②

経済成長論

：経済成長の要因を探る分野

長期的な(1人あたり)GDPの増加

⇒ 長期的には人口も変化するので、
１人あたりGDPに着目する

IS-LM分析　：短期

（物価P、資本Kは一定）

AD-AS分析：長期

中期でもOK

（Pは変化、Kは一定）

経済成長論　：(超)長期

（Pは考慮せず、Kは変化）

古典派の二分法

資本蓄積

：資本Kが増えていくこと

（蓄積する）

機械や工場

Kapital(独)

「どうすれば資本Kが増えるか？」

結論：企業が投資Iをすればいい

投資I

：資本Kを購入すること

（例）企業が工場を建てる、
新しい機械を導入する

（数値例）

2020年に日本全体では工場が100か所

$$K_{2021} = K_{2020} + I_{2020}$$

2021年に工場は110か所

2020年に新たに
10か所の工場が新設

(注意) 資本の減価償却は無視している

$$K_{2021} = K_{2020} + I_{2020}$$

$$K_{2021} - K_{2020} = I_{2020}$$

デルタ

$$\Delta K_{2020} = I_{2020}$$

変化分を表す

時間を省略して表記すると、

$\boxed{\Delta K = I}$ ：<u>資本蓄積式</u>

ソロー・モデル(新古典派成長理論)

ソロー＝スワン・モデル

：新古典派の経済成長モデルで最も基本的なモデル

新古典派なので…

L, Kを定数のように扱う
(ただし、時間を通じて変化する)

・労働Lと資本Kは完全雇用

・古典派の二分法(貨幣の中立性)

貨幣市場は考慮せず

⇒ 貨幣は物価Pに影響をするだけ

単純化の仮定

- 政府、外国は存在しない

  ⇒ 政府支出G, 租税T, 輸出EX, 輸入IMはなし

- 貯蓄率sは一定

  ⇒ 家計の効用最大化を考えない

消費関数

$$C = cY + \cancel{C_0}$$
$$= (1-s)Y$$
$$= Y - sY$$

$$Y - C = sY$$

$(0 < s < 1)$

$\boxed{S = sY}$ ：貯蓄関数

限界貯蓄性向
＝平均貯蓄性向(貯蓄率)

コブ＝ダグラス型生産関数

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Y：国民所得(GDP, 付加価値総額, 生産量)

A：技術水準(全要素生産性TFP) Total Factor Productivity

K：資本　　α：資本分配率 $(0 < \alpha < 1)$

L：労働　　$1-\alpha$：労働分配率

生産要素(資本Kと労働L)は代替可能

投資の二面性

投資Iは生産を
増加させる：供給面

① 投資I → $\underbrace{資本K\uparrow \rightarrow Y\uparrow}$

生産関数：$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

投資$I\uparrow$は総需要を増加させる：需要面

② 財市場：$\underbrace{Y}_{総供給Y^S} = \underbrace{C + I}_{総需要Y^D}$

IS-LM分析は②しか考慮していない

１人あたり生産関数

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

両辺を労働Lで割ると、

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \cdot L^{-1}$$

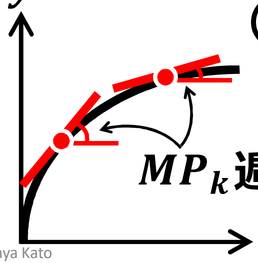
$$= AK^{\alpha}L^{1-\alpha-1} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A \cdot \frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}}$$

$$= A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

1人あたり生産量$y = \frac{Y}{L}$
（1人あたりGDP）

1人あたり資本$k = \frac{K}{L}$
（資本労働比率、資本装備率）

$\frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \rightarrow \boxed{y = Ak^{\alpha}}$：1人あたり生産関数



（例）

$y = Ak^{0.5} \rightarrow MP_k = \frac{dy}{dk} = 0.5 \cdot Ak^{-0.5}$

$= A\sqrt{k}$

（1人あたり）資本の限界生産力

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{k^{0.5}} = \frac{A}{2\sqrt{k}}$

（参考）$MP_k = MP_K$

- $y = Ak^{\alpha}$より、

  $MP_k = \alpha A k^{\alpha-1} = \alpha A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}$

  等しい

- $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$より、

  $MP_K = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha A \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1}$

  $L^{1-\alpha} = L^{-(\alpha-1)} = \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha-1}$

両辺の変化率をとる

$\dfrac{\Delta x}{x}$ ：xの増加率

$\dfrac{\Delta L}{L}$ ：Lの増加率（人口成長率n）

$\dfrac{\Delta K}{K}$ ：Kの増加率

$$A = \frac{B}{C}$$

両辺の変化率をとると、

$$\underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{\text{左辺}} = \underbrace{\frac{\Delta B}{B} - \frac{\Delta C}{C}}_{\text{右辺}}$$

例①	今期	次期	$\Delta x/x$	左辺	右辺	誤差
A	10	12	0.2	0.2	0.3	0.1
B	100	180	0.8			
C	10	15	0.5			

例②	今期	次期	$\Delta x/x$	左辺	右辺	誤差
A	10	9.18	-0.08	-0.08	-0.09	0.01
B	100	101	0.01			
C	10	11	0.1			

ソロー・モデルの構造

K, Lは完全雇用

K, Lは定数(時間を通じて変化)

A, αは定数(時間を通じて一定)

決定 $Y = \overbrace{AK^{\alpha} \boxed{L}^{1-\alpha}}^{\text{すべて定数}}$

今期

$C = cY$ | $S = sY$

決定 決定

財市場：$\underbrace{Y}_{\text{総供給}Y^S} = \underbrace{C + \boxed{I}}_{\text{総需要}Y^D}$ | $S = \boxed{I}$

セイの法則

⇒ 供給が需要を決める(古典派)

$\Delta K = I$

$\dfrac{\Delta L}{L} = n$ (定数)

次期のLは$(1+n)$倍

(例)

$n = 0.1$ (10% ↑)

⇒ Lは1.1倍

次期 決定 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

ソローの基本方程式

$$k = \frac{K}{L} \rightarrow \frac{\Delta k}{k} = \underbrace{\frac{\Delta K}{K}}_{①} - \underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{②} \cdots (*)$$

$$①: \frac{\Delta K}{K} = \overbrace{\frac{I}{K} = \frac{S}{K}}^{\text{財市場均衡条件}} = \frac{sY}{K} = \frac{s \cdot \frac{Y}{L}}{\frac{K}{L}} = \frac{sy}{k}$$

貯蓄関数

$y = Ak^{\alpha}$

$$②: \frac{\Delta L}{L} = n$$

これらを$(*)$式に代入すると、

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{sy}{k} - n$$

両辺にkをかけると、

$$\boxed{\Delta k = sy - nk}$$

：ソローの基本方程式

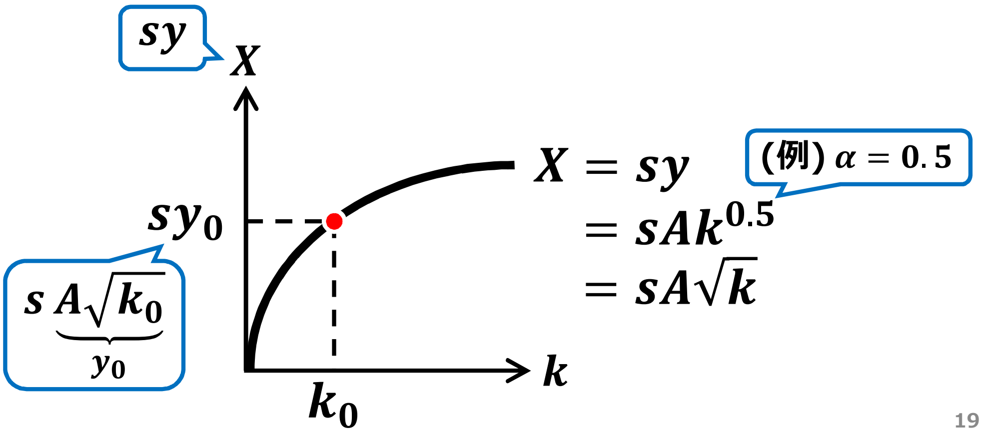
（ソロー方程式、資本蓄積の基本方程式）

s：貯蓄率 (定数)
y：１人あたり生産量$(y = Ak^{\alpha})$
n：人口成長率 (定数)
k：１人あたり資本

$$\Delta k = sy - nk$$

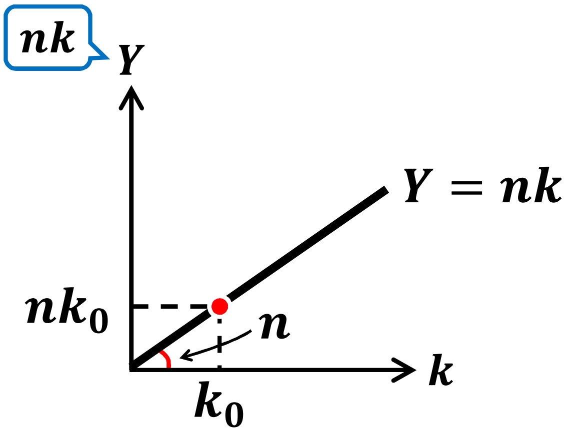
$y = Ak^{\alpha}$

$X = sy$とおくと、



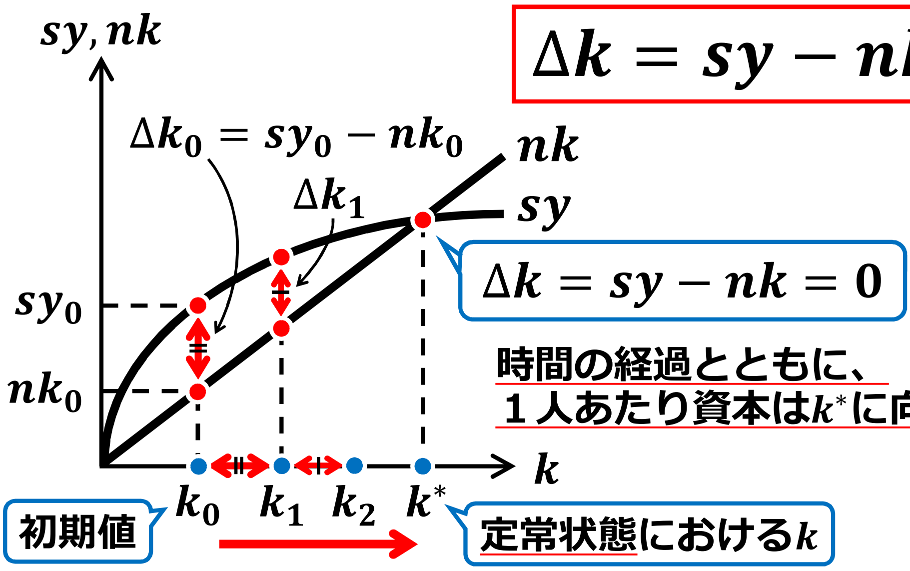
$$\Delta k = sy - nk$$

$Y = nk$とおくと、



資本蓄積のイメージ

$$\boxed{\Delta k = sy - nk}$$



時間の経過とともに、
１人あたり資本はk^*に向かう

定常状態

1人あたり資本

：経済が一定のkに収束した状態

定常状態ではkは一定値であるので…

① $\dfrac{\Delta k}{k} = \dfrac{\Delta K}{K} - \dfrac{\Delta L}{L} = 0 \rightarrow \boxed{\dfrac{\Delta K}{K} = \dfrac{\Delta L}{L}}$

KとLがバランス良く成長する

kが一定ならyも一定

② $y = Ak^{\alpha} \rightarrow \boxed{\dfrac{\Delta y}{y} = 0}$

（$\boxed{A}, \alpha$：定数）

yの成長が止まる

ポイント(ソロー・モデル)

長期的には、

① 資本の成長率＝労働の成長率

② １人あたりGDP(y)の成長が止まってしまう

１人あたり生産量

定常状態において…

$$\Delta k = sy - nk = 0$$

$$sy = nk$$

よって、

$$\boxed{\frac{sy}{k} = n}$$

が成立する

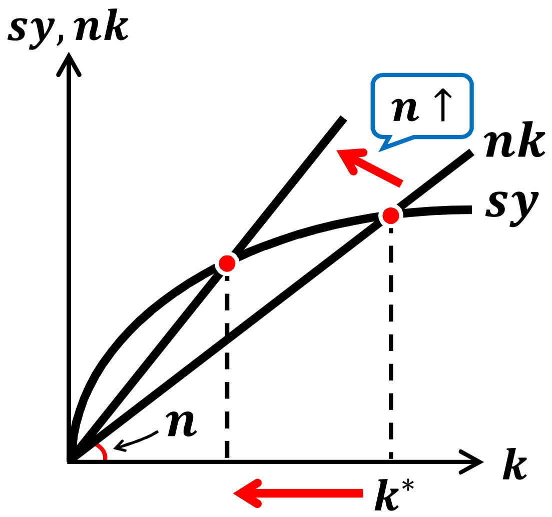
定常状態のk^*が求まる

覚え方

キスはノー

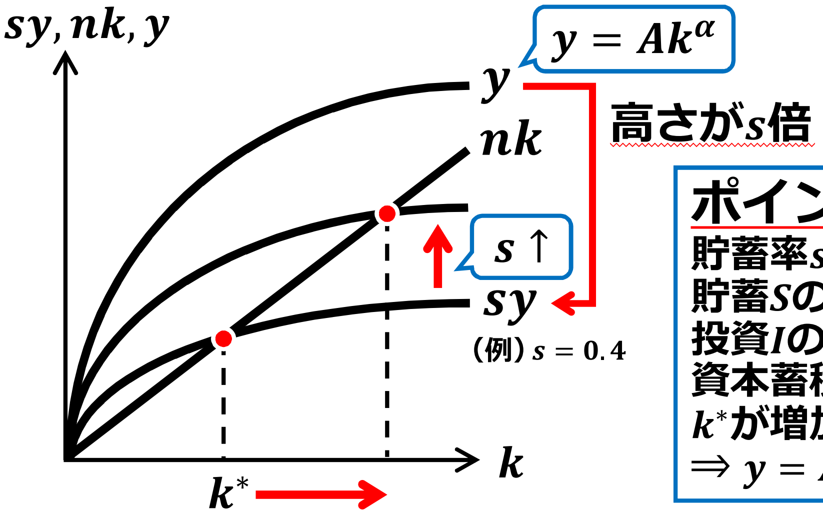
$$\frac{sy}{k} = n$$

①人口成長率nの上昇



ポイント
人口が増えるので、
定常状態における
１人あたりの資本k^*
は減少する
$\Rightarrow y = Ak^\alpha$より$y^* \downarrow$

②貯蓄率sの上昇



ポイント
貯蓄率sの上昇による
貯蓄Sの増加が
投資Iの増加に繋がり、
資本蓄積によって
k^*が増加する
$\Rightarrow y = Ak^{\alpha}$より$y^* \uparrow$

例題

ソロー・モデルにおいて、生産関数を

$$Y = AK^{0.5}L^{0.5}$$

とする。ただし、$A = 1$である。
人口成長率$n = 0.05$、貯蓄率$s = 0.2$とし、
技術進歩や資本減耗がないとすると、
定常状態における１人あたり資本k^*の値を
求めなさい。

解答

生産関数より$A=1, \alpha=0.5$であるので、

$$y=Ak^{\alpha}=1\cdot k^{0.5}=k^{0.5}$$

キスはノー

$\dfrac{sy}{k}=n$ より、

$$\frac{sy}{k}=n \rightarrow \frac{0.2\cdot \cancel{k^{0.5}}}{k}=0.05 \rightarrow \frac{0.2}{k^{0.5}}=0.05$$

$k=k^{0.5}\cdot \cancel{k^{0.5}}$

$\sqrt{k}$

$$\rightarrow k^{0.5}=\frac{0.2}{0.05}=4 \rightarrow k^{*}=\underline{\underline{16}}$$

最後に…

・面白くなってきましたか？
・身近な経済現象への
　理解は深まってきたはず
・新シリーズで会いましょう！